



Astérosismologie des étoiles ZZ Ceti

David Pech

► To cite this version:

David Pech. Astérosismologie des étoiles ZZ Ceti. domain_other. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2005. Français. NNT : . tel-00010095

HAL Id: tel-00010095

<https://theses.hal.science/tel-00010095>

Submitted on 9 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE TOULOUSE III - PAUL SABATIER

UFR Physique Chimie Automatique

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE TOULOUSE III

Discipline: ASTROPHYSIQUE

présentée et soutenue par:

David PECH

le 14 juin 2005

Titre:

UNIVERSITE TOULOUSE III - PAUL SABATIER

UFR Physique Chimie Automatique

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE TOULOUSE III

Discipline : ASTROPHYSIQUE

présentée et soutenue par :

David PECH

le 14 juin 2005

Titre :

Astérosismologie des étoiles ZZ Ceti

Directeur de thèse :

Gérard VAUCLAIR

JURY

Pr REME Henri, *Président*

Dr BAGLIN Annie, *Rapporteur*

Dr MICHEL Eric, *Rapporteur*

Dr BERTHOMIEU Gabrielle, *Examineur*

Pr FONTAINE Gilles, *Examineur*

Dr VAUCLAIR Gérard, *Directeur de thèse*

AUTEUR : David PECH

TITRE : Astérosismologie des étoiles ZZ Ceti

DIRECTEUR DE THÈSE : Gérard VAUCLAIR

LIEU ET DATE DE SOUTENANCE : Observatoire de Midi-Pyrénées 14 juin 2005

RÉSUMÉ :

Cette thèse montre comment l'astérosismologie, basée sur l'observation et la modélisation, peut rendre compte de la structure interne d'une étoile naine blanche DAV, notamment comment il est possible de déduire la masse de son enveloppe d'hydrogène résiduel. Nous avons étudié 2 ZZ Ceti : HL Tau 76 (bord rouge de la bande d'instabilité) et G 185-32 (bord bleu). La modélisation indique que ces 2 étoiles possèdent une enveloppe d'hydrogène de masse sensiblement identique : $M(H) = 2.0 (\pm 0.3) \times 10^{-4} M_{\star}$. Cela suggérerait une possible constance de la masse de cette enveloppe pour l'ensemble des étoiles DA et par là même d'éventuelles implications pour la cosmochronologie et les mécanismes de l'évolution stellaire. Par ailleurs, cette thèse illustre comment la modélisation permet de révéler certaines caractéristiques physiques comme une rotation de l'étoile non-uniforme, un couplage non-linéaire au sein d'un triplet de modes résonants, une interaction entre les pulsations et la convection.

Asteroseismology of ZZ Ceti stars. Abstract in English on last page.

MOTS-CLÉS

bande d'instabilité - convection - cosmochronologie - couplage non-linéaire - DAV - évolution stellaire - G 185-32 - HL Tau 76 - modes de pulsation - modélisation - naine blanche - oscillations non radiales - paramètres structurels - rotation non-uniforme - *rotational splitting* - structure interne - ZZ Ceti

DISCIPLINE : Astrophysique

U.F.R. : Physique Chimie Automatique

LABORATOIRE : Observatoire Midi-Pyrénées

14, avenue Edouard Belin 31400 Toulouse FRANCE

Table des matières

<i>Introduction</i>	9
1 Oscillations non-radiales dans les étoiles variables	13
1.1 Généralités sur les étoiles variables	13
1.1.1 Définition d'une étoile variable	13
1.1.2 Présentation des principales classes d'étoiles variables	13
1.1.3 Echelles de temps importantes	16
1.2 Considérations théoriques fondamentales	17
1.2.1 Equations de conservation	17
1.2.2 Le champ de gravité	18
1.2.3 Traitement adiabatique ou non-adiabatique du problème des pulsations stellaires	19
1.3 Propriétés des pulsations non-radiales	21
1.3.1 Perturbations en termes d'harmoniques sphériques	21
1.3.2 Relation de dispersion et fréquences remarquables	22
1.3.3 Conditions de propagation d'un mode et diagramme-diagnostic	22
1.3.4 Description des modes p , g et f	23
1.4 Mécanismes d'excitation et d'amortissement des modes	23
1.4.1 Stabilité de l'étoile face aux pulsations stellaires	23
1.4.2 le ϵ -mécanisme	24
1.4.3 le κ -mécanisme	24
1.5 Influences diverses sur les modes de pulsation	25
1.5.1 Rôle de la rotation et des champs magnétiques	25
1.5.2 Rôle de la convection	26
1.6 Rôle et enjeux de l'astérosismologie	26
1.6.1 Définition de l'astérosismologie	26
1.6.2 Les principaux outils de l'astérosismologie	27
1.6.3 Conclusion	34
1.7 Traitement mathématique du problème des pulsations non-radiales	35
1.7.1 Linéarisation des équations fondamentales	35
1.7.2 Problème des conditions limites	36
1.7.3 La résolution du système d'équations différentielles linéarisées comme un problème de valeurs propres	36
1.7.4 Choix de la version de la théorie de la longueur de mélange pour le calcul des pulsations	36

2	Energie cinétique des modes de pulsation	39
2.1	Considérations théoriques générales	39
2.1.1	Intérêt du calcul de l'énergie cinétique	39
2.1.2	Influences respectives des 2 discontinuités chimiques sur le profil de l'énergie cinétique des modes	41
2.1.3	Effets des autres paramètres sur le profil des courbes de l'énergie cinétique	43
2.1.4	Composantes radiale y_1 et tangentielle y_2 de la fonction propre des modes. Régions de formation des modes de pulsation	44
2.2	Elaboration du programme de calcul de l'énergie cinétique des modes de pulsation	48
2.2.1	Introduction	48
2.2.2	Illustrations du calcul de l'énergie cinétique pour divers modèles aux paramètres stellaires variés	49
3	Etude de la ZZ Ceti <i>HL Tau 76</i>	59
3.1	Introduction	59
3.2	Données observationnelles	59
3.3	Modélisation de HL Tau 76	61
3.3.1	Elaboration de modèles statiques et algorithme de sélection	61
3.3.2	Elaboration de la grille de modèles spécifiques à HL Tau 76	63
3.4	Caractéristiques du modèle représentant HL Tau 76	68
3.4.1	Caractéristiques structurales	68
3.4.2	Spectre du modèle : modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$	68
3.5	Comparaison des modes observés et calculés. Identification des périodes observées	70
3.5.1	Comparaison des <i>period spacings</i> théoriques et observés	70
3.5.2	Multiplets induits par l'effet du <i>rotational splitting</i>	70
3.5.3	Associer les modes observés et les modes calculés	71
3.6	Discussion	72
3.6.1	Qualité de l'ajustement entre les modes observés et calculés	72
3.6.2	Désaccords entre analyses observationnelle et théorique	75
3.7	Conclusion	76
4	Etude de la ZZ Ceti <i>G 185-32</i>	81
4.1	Introduction	81
4.1.1	Présentation de G 185-32	81
4.1.2	Stratégie employée pour modéliser G 185-32	82
4.2	Données observationnelles	84
4.3	Détermination du meilleur modèle pour représenter G 185-32	85
4.3.1	Influence secondaire de la variation de la T_{eff} sur le spectre de pulsation des modèles	85
4.3.2	Détermination des modèles-solutions dans le plan $\log q(H)$ vs. M_\star	86
4.3.3	Détermination précise de M_\star et de $q(H)$. Etude de la T_{eff}	87
4.3.4	Caractéristiques du modèle représentant G 185-32	88
4.4	Etude du <i>rotational splitting</i> relatif à G 185-32	92
4.4.1	Evaluation du <i>rotational splitting</i> à partir du spectre de G 185-32	92
4.4.2	Calcul du <i>rotational splitting</i>	93
4.4.3	Valeur retenue pour le <i>frequency shift</i> des modes de degré $\ell=2$. Identification de certains modes et étude de la vitesse de rotation de G 185-32	93
4.5	Identification complète du spectre observé de G 185-32	95

4.6	Discussion	96
4.6.1	Résultats issus de la modélisation	96
4.6.2	Désaccords sur le degré ℓ des modes du spectre de G 185-32	98
4.6.3	L'énigmatique mode de période 141.9 s	99
4.7	Conclusion	102
4.7.1	Modélisation de G 185-32	103
4.7.2	Estimation de l'effet du <i>rotational splitting</i> sur les modes de G 185-32 . .	103
4.7.3	Discussion	103
5	Conclusion	105
5.1	Bilan	105
5.2	HL Tau 76 et G 185-32	106
5.3	Perspectives	108
A	ASTEROSEISMOLOGICAL CONSTRAINTS ON THE STRUCTURE OF THE ZZ CETI STAR <i>HL Tau 76</i>	113
A.1	Introduction	114
A.2	Observational background	116
A.3	Modeling strategy	116
A.4	Identifying HL Tau 76 pulsation modes	121
A.4.1	Featuring the best model	121
A.4.2	Predicted and observed spectra. Periods identification.	122
A.4.3	Discussion	123
A.5	Conclusion	126
B	THE ZZ CETI STAR G 185-32 : A NEW INSIGHT BASED ON ASTEROSEISMOLOGY	131
B.1	Introduction	132
B.2	Observational background	132
B.3	Modeling strategy	133
B.3.1	A reference mode	133
B.3.2	Determining potential solutions in the $\log q(H)$ vs M_\star plane	133
B.3.3	Fine determination of M_\star and $q(H)$. Estimation of T_{eff}	134
B.3.4	Featuring the best fitting model for G 185-32	135
B.4	Preliminary study of the observed modes of G 185-32	135
B.4.1	First identification of the modes	135
B.4.2	Linear combinations or true resonances?	136
B.5	The stellar rotation rate and its signature on the pulsation modes	136
B.5.1	Evaluation of the rotational splitting effect on the observed modes	136
B.5.2	Stellar rotation rate and further remarks	138
B.5.3	Complete identification of the observed modes of G 185-32	139
B.6	Discussion	139
B.6.1	On the determination of the spherical degree of the modes	139
B.6.2	The peculiar 141.9 s mode	142
B.7	Conclusive remarks	143
	BIBLIOGRAPHIE	145
	LISTE DES TABLEAUX	149

Introduction

L'étude astérosismologique des naines blanches variables permet, en principe, de déterminer un grand nombre de paramètres fondamentaux de ces étoiles : leur masse totale, la masse de leur enveloppe résiduelle d'hydrogène et/ou d'hélium, selon qu'il s'agit de naines blanches de type DA ou DB, leur période de rotation, leur luminosité, leur rayon, leur distance, leur taux de refroidissement ...

Les étoiles naines blanches, sous bien des aspects, occupent une place centrale en Astrophysique et plus spécialement dans l'étude de la matière stellaire. Sachant que plus de 97% des étoiles de notre Galaxie achèvent leur évolution comme naines blanches, il est manifeste que l'étude de la structure interne de ce type d'étoiles présente un intérêt essentiel pour valider les hypothèses sous-jacentes à la théorie de l'évolution stellaire et à ses prédictions. Par ailleurs, en tant que phase ultime de l'évolution des étoiles de masse inférieure ou égale à $8 M_{\odot}$, elles constituent une vieille population stellaire, les naines blanches les plus froides étant les plus anciennes.

Du fait que leur distribution de masse montre une très faible dispersion autour d'une valeur moyenne de $0.6 M_{\odot}$, la séquence de refroidissement des naines blanches présente également une faible dispersion dans le diagramme H-R.

Utiliser les naines blanches pour dater le disque galactique est envisagé depuis une dizaine d'années. Les séquences de refroidissement des naines blanches dans plusieurs amas globulaires ont été observées par le Hubble Space Telescope. L'avènement des grands télescopes, en particulier le VLT, permet d'envisager la détection des naines blanches jusqu'à la magnitude limite marquant la fin de la séquence de refroidissement ainsi que l'observation des naines blanches variables dans ces amas globulaires.

La probable découverte des premiers membres de la population de naines blanches du halo galactique encourage l'utilisation de la séquence de refroidissement comme indicateur indépendant de l'âge de ces populations.

En outre, on suspecte également que ces naines blanches du halo galactique pourraient représenter une fraction significative de la masse baryonique manquante dans la (les) galaxie(s).

Notons aussi que les systèmes d'étoiles doubles contenant soit deux naines blanches soit une naine blanche et une sous naine chaude de type B sont actuellement considérés comme les meilleurs candidats de précurseurs de supernovae de type Ia (SNIa), utilisées comme étalons de distance cosmologique.

Tout ceci montre clairement que les populations de naines blanches offrent un intérêt considérable pour divers domaines de l'Astrophysique allant de l'évolution stellaire à la cosmologie.

L'étude des naines blanches variables occupant les trois bandes d'instabilité que l'on trouve le long de la séquence de refroidissement pour les PG1159 variables, les DBV et les DAV, devrait permettre de mesurer le taux de refroidissement dans trois "fenêtres" le long de cette séquence, dans trois domaines de température effective différents : entre 140 kK et 80 kK pour les PG1159

variables, vers 25 kK pour les DBV et vers 12 kK pour les DAV.

L'ajustement des modèles évolutifs de naines blanches avec la fonction de luminosité permet de déterminer l'âge de la population dont les naines blanches représentent le stade d'évolution final. Ce point de vue théorique est cependant difficile à mettre en oeuvre. Deux difficultés principales limitent jusqu'à présent la précision des âges ainsi déterminés : l'incertitude sur la masse d'hydrogène contenue dans les couches extérieures des naines blanches DA (80% des naines blanches) et d'hélium contenue dans les naines blanches DB (20% restant) et l'incertitude sur la description de la phase de cristallisation du noyau de carbone et d'oxygène.

L'astérosismologie devrait, en principe, permettre l'évaluation précise de la quantité d'hydrogène (respectivement d'hélium) résiduel des DA (respectivement DB). Cependant, la réalisation de cet objectif nécessite l'identification des modes de pulsation de manière non ambiguë et la détection d'un nombre suffisant de ces modes dans les spectres des naines blanches variables observées.

Elle nécessite parallèlement la construction d'un grand nombre de modèles de naines blanches et le calcul de leurs périodes de pulsation, afin de les confronter aux observations. Beaucoup de travail reste à accomplir, tant sur le plan de l'acquisition de données observationnelles (recherche de nouvelles naines blanches variables, étude astérosismologique des naines blanches variables connues à partir de campagnes d'observation photométriques multisites) que dans le domaine de la modélisation.

Cette thèse s'est inscrite dans la continuité des travaux menés au Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse. Elle a constitué un travail de modélisation théorique et d'interprétation des données observationnelles.

L'étude des étoiles ZZ Ceti (DAV) a été favorisée : en effet, les ZZ Ceti constituent la classe d'étoiles naines blanches variables la plus évoluée et la plus peuplée (environ 70 étoiles DAV sont connues à ce jour) bien qu'elles se répartissent sur une bande d'instabilité très restreinte (T_{eff} comprise entre 11000 K et 12500 K environ). Ces étoiles sont soumises à un fort gradient de gravité et possèdent ainsi une composition chimique stratifiée : un coeur dégénéré de carbone pur (ou un coeur mixte dégénéré de carbone et d'oxygène), surmonté d'une couche d'hélium, elle-même recouverte d'une enveloppe d'hydrogène.

La bande d'instabilité des ZZ Ceti semble représenter une **vraie** bande d'instabilité en ce sens que chaque étoile DA qui atteint cette bande d'instabilité sur sa séquence de refroidissement devient variable (en effet aucune étoile DA non variable n'a été pour le moment détectée au sein de la bande d'instabilité des ZZ Ceti); la pureté de cette bande d'instabilité est toutefois soumise à controverse actuellement. Cela implique que la structure stellaire qui peut être déduite de l'astérosismologie pour les ZZ Ceti est valable pour l'ensemble des naines blanches de la classe des DA.

Nous avons fait usage de programmes de calcul de modèles statiques de naines blanches et de calcul de pulsations non radiales adiabatiques. Nous avons amélioré le code de modélisation déjà existant dans le Laboratoire (en vérifiant son paramétrage, en mettant à jour ses tables d'opacité, en lui ajoutant des options comme le calcul de l'énergie cinétique des modes de pulsation) et nous l'avons associé à un algorithme de sélection de meilleur modèle reposant sur une loi du χ^2 .

L'élaboration des modèles et le calcul de leurs modes de pulsation ont suggéré d'interpréter les observations en comparant les périodes observées à celles issues des modèles. Cette comparaison a permis de contraindre dans l'espace des paramètres le meilleur modèle pouvant décrire la naine blanche variable considérée et, en particulier, de déterminer la masse de son enveloppe d'hydrogène résiduel.

L'identification des pulsations présentes dans le spectre des étoiles ZZ Ceti étudiées (HL Tau 76 et G 185-32) à l'aide des modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ calculés pour le modèle retenu pour les représenter a permis d'attribuer une valeur à leur degré ℓ , à leur ordre radial k et à leur nombre azimuthal m .

Les seules données observationnelles ne permettant pas de lever l'indétermination sur la réalité de certaines périodes (vrai mode ou combinaison linéaire de modes parents), cette identification a également mis en évidence la présence de faux modes dans le spectre observé de ces étoiles ainsi que la présence de vraies résonances.

*De même, l'interprétation de ces identifications de modes (notamment en prenant en compte l'erreur relative qui concerne l'identification individuelle de chaque mode) a permis de formuler des hypothèses pour justifier certaines particularités propres à ces 2 étoiles ; par exemple HL Tau 76 pourrait être éventuellement affectée par une rotation non-uniforme et, compte-tenu de sa T_{eff} qui la situe sur le bord rouge de la bande d'instabilité des ZZ Ceti, domaine de température pour lequel la convection joue un rôle de plus en plus prépondérant, son spectre pourrait être une illustration de l'action perturbatrice que la convection opère sur le comportement idéal des modes de pulsation ; de la même façon la particularité principale du spectre de G 185-32 (période de 141.9 s d'amplitude atypique) pourrait s'expliquer par un phénomène de vraie résonance qui affecterait l'amplitude du mode observé, les modes de ce triplet résonant pourraient en outre subir des couplages non-linéaires résultant du phénomène de **frequency lock** ou du régime intermédiaire. Afin de poursuivre l'étude de ce mode énigmatique et ainsi être en mesure de valider cette toute dernière hypothèse, il serait nécessaire d'élaborer un code de calcul de pulsations non adiabatique, qui permettrait d'évaluer le taux de croissance K des modes impliqués dans ce triplet résonant puis de vérifier que celui-ci satisfait les relations qui caractérisent le **frequency lock** et le régime intermédiaire.*

Enfin, la masse d'hydrogène résiduel dérivée de la modélisation est approximativement identique pour ces 2 étoiles. Ce résultat inciterait à modéliser d'autres étoiles ZZ Ceti pour déduire en particulier la masse de leur enveloppe d'hydrogène.

Si ces modélisations futures retrouvent la valeur estimée pour la masse des enveloppes de HL Tau 76 et G 185-32, cela sous-entendrait que deux étoiles DA de même température effective (et de même masse totale) auraient approximativement le même âge (l'incertitude sur leur âge étant proportionnelle à la dispersion sur la valeur de la masse de l'enveloppe d'hydrogène) et légitimerait la mise en oeuvre des techniques de datation par la cosmochronologie.

Un tel résultat impliquerait également des contraintes supplémentaires pour la compréhension des mécanismes de l'évolution stellaire qui forcent des progéniteurs de masse initiale très variable (pouvant aller de moins de $1 M_{\odot}$ à environ $8 M_{\odot}$) à se dépouiller de leur hydrogène pour devenir des naines blanches possédant une fraction massique d'hydrogène plus ou moins standard.

Chapitre 1

Oscillations non-radiales dans les étoiles variables

1.1 Généralités sur les étoiles variables

1.1.1 Définition d'une étoile variable

Avant d'aborder le formalisme des pulsations stellaires et de l'astérosismologie, il est souhaitable de préciser tout d'abord ce que le terme *étoile variable* sous-entend.

Des étoiles variables sont des étoiles au sein desquelles il existe des mouvements dynamiques de grande envergure et généralement périodiques. Ces mouvements ont pour effet de modifier les propriétés physiques de l'étoile au cours du temps. La manifestation la plus simple de telles perturbations est la pulsation purement radiale où l'étoile conserve sa symétrie sphérique.

La caractéristique d'une étoile variable la plus évidente et la plus simple à détecter est sa variation périodique de luminosité apparente : preuve en est que la grande majorité de ces étoiles sont découvertes grâce aux variations de leur courbe de lumière. D'autres observables peuvent également révéler la variabilité d'une étoile : la vitesse radiale, le type spectral, etc...

Les pulsations radiales sont connues et étudiées depuis près d'un siècle : les fondements mathématiques visant à expliquer ce phénomène par des expansions cycliques de l'étoile ont été posés par Shapley (1914) [78] puis par Eddington (1918) [36].

On rencontre également des étoiles variables qui sont le siège de pulsations *non radiales*. Il s'agit là d'oscillations stellaires plus générales en ce sens que le déplacement d'un élément de masse donné dans l'étoile peut s'effectuer dans n'importe quelle direction et n'est donc plus assujéti à osciller suivant l'axe radial. De ce fait, la théorie des oscillations non radiales est plus complexe, plus générale que celle des pulsations radiales mais également beaucoup plus puissante pour expliquer les mécanismes des pulsations stellaires. C'est sur ce dernier type d'oscillations que repose notre étude.

1.1.2 Présentation des principales classes d'étoiles variables

Les étoiles variables peuvent se diviser en deux principales catégories, le critère de différenciation provenant du caractère radial ou non radial des pulsations.

Il serait hors de propos de dresser ici une liste exhaustive des différentes étoiles variables. Nous soulignons juste les principales catégories, à titre illustratif.

Etoiles à pulsations radiales

Dans cette catégorie d'étoiles variables, on rencontre les Céphéides. Cette appellation générale englobe :

- les Céphéides «classiques».

Ces étoiles jouent un rôle important en cosmologie car elles servent à contraindre les échelles de distance de l'Univers grâce à la relation empirique qui relie leur période et leur luminosité :

$$\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = 1.15 \log \Pi_d + 2.47$$

où Π_d désigne la période des pulsations radiales de l'étoile (exprimée en jours) et L_{\odot} la luminosité solaire. Ces Céphéides sont des géantes jaunes ou des supergéantes. Du fait de leur très forte luminosité (allant de $300 L_{\odot}$ à $26\,000 L_{\odot}$), elles sont observables à de très longues distances : on a détecté leur présence dans environ 30 galaxies externes.

Les périodes des Céphéides classiques sont presque toutes comprises dans un intervalle de temps allant de 1 à 50 jour(s). Toutefois quelques unes présentent des périodes pouvant atteindre 100 voire 200 jours. Plus de 700 Céphéides sont connues actuellement dans la Galaxie et elles se retrouvent toutes dans le plan galactique.

- les Céphéides à battement ou à double-mode.

Ces étoiles n'ont aucune des caractéristiques physiques des Céphéides classiques. Elles constituent un faible nombre d'étoiles (on en connaît à peine plus d'une dizaine) dont les courbes de lumière sont apériodiques. Toutefois, ces courbes de lumière peuvent se décomposer essentiellement en deux variations périodiques pour chaque étoile. Ces deux modes interagissent entre eux et produisent des battements. Ces courbes de lumière périodiques, lorsqu'on les ajoute, redonnent la courbe de lumière non périodique effectivement observée. Leur période varie entre 1 et 7 jour(s).

- les Céphéides naines dont la période caractéristique est comprise entre 1 et 3 heure(s).

A noter également les étoiles *RR Lyrae* parmi les étoiles à pulsations radiales. Ce sont des étoiles de population II et elles possèdent des périodes caractéristiques de l'ordre de 1h 30mn à 1 jour.

Etoiles à pulsations non-radiales

Pour illustrer cette catégorie d'étoiles variables, nous pouvons commencer par évoquer le Soleil, étoile de la Séquence Principale de type **G**. De par sa proximité, le Soleil est étudié et connu avec grande précision. On lui connaît des millions de modes de pulsation, en particulier les pulsations de période 5 minutes. Ces oscillations à 5 minutes sont des pulsations non-radiales appelées modes **p** (que nous définirons plus loin). Les oscillations solaires ont été découvertes par Evans & Michard (1962) [37] [38] puis par Leighton, Noyes & Simon (1962) [65].

Nous pouvons aussi citer les étoiles GW Vir ou étoiles PG 1159 variables dont le prototype, PG 1159-035, a été découvert en 1979. Ces étoiles se caractérisent par une gravité de surface allant de $\log g = 6$ pour les moins évoluées à $\log g = 8$ pour les plus anciennes. Les GW Vir, ou encore DOV, sont des étoiles pré-naines blanches puisque les plus vieilles rejoignent la Séquence de Refroidissement des Naines Blanches alors que d'autres sont encore au stade de noyau de Nébuleuse Planétaire.

Nous poursuivons notre tour d’horizon des étoiles variables avec les DBV, naines blanches variables de température effective voisine de 25 kK dont l’enveloppe est constituée d’hélium pur.

Nous terminons avec les ZZ Ceti ou étoiles DAV, c’est-à-dire avec les naines blanches variables (de température effective comprise entre 11 kK et 12.5 kK) dont l’enveloppe est formée d’hydrogène pur. La première étoile DA variable (HL Tau 76, étudiée dans le cadre de cette thèse) a été découverte en 1968 par Landolt [62]. Ces étoiles occupent une bande d’instabilité très restreinte et leurs périodes de pulsation sont généralement comprises entre 75 s et 1200 s.

Il faut signaler que les ZZ Ceti constituent la classe d’étoiles variables la plus peuplée (environ 70 étoiles DAV sont recensées à ce jour), tout au moins dans la portion de la Galaxie que représente le voisinage solaire. Elles semblent surpasser en nombre toutes les autres étoiles variables par un facteur considérable, peut-être supérieur à 100.

C’est sur les ZZ Ceti qu’a porté le travail réalisé dans cette thèse.

Dans le cas des naines et des sous-naines variables, la T_{eff} des étoiles à pulsations non-radiales varie de 11 kK (pour les ZZ Ceti) à au moins 170 kK (pour les Noyaux de Nébuleuse Planétaire). Les périodes de pulsation de ces étoiles sont le plus souvent comprises entre 2 et 20 minutes.

La Fig. 1.1 présente les principales classes d’étoiles variables dans le diagramme H-R.

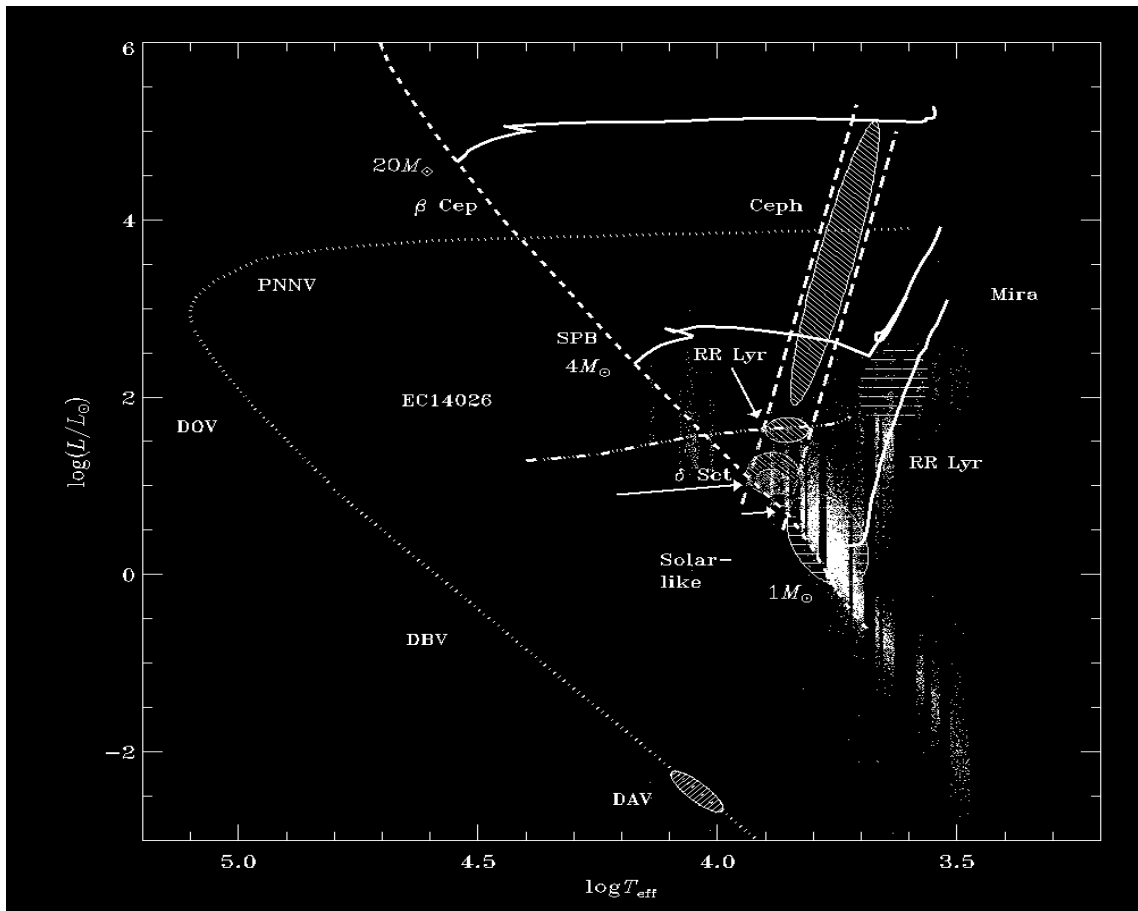


FIG. 1.1 – Principales classes d’étoiles variables dans le diagramme H-R

1.1.3 Echelles de temps importantes

Dans ce paragraphe, nous présentons sommairement quelques échelles de temps particulièrement utiles pour l'étude des pulsations stellaires. Ces échelles de temps caractéristiques nous permettent de justifier les approximations faites dans le traitement physique et mathématique du problème des oscillations d'étoiles variables, en autorisant notamment des simplifications avantageuses.

La période des pulsations

L'échelle de temps la plus fondamentale dans le cadre des pulsations stellaires est naturellement la période du mode fondamental des pulsations, que nous dénoterons Π ou P par la suite. Cette période peut, dans le cadre des oscillations radiales, s'obtenir facilement grâce à la relation *période-densité moyenne* : $\Pi(\bar{\rho})^{1/2} = cste$.

Pour les oscillations non-radiales, les périodes Π ne vérifient pas cette relation simple. D'une manière générale, les pulsations de tout type d'étoiles variables ont des périodes fondamentales qui s'inscrivent dans un intervalle aussi large que : $3 \text{ sec} \leq \Pi \leq 1000 \text{ jrs}$.

Le temps de chute libre

Le temps de chute libre, encore appelé temps dynamique et généralement noté t_{ff} , est le temps caractéristique associé à un effondrement gravitationnel de l'étoile. C'est encore la durée nécessaire à l'étoile pour retrouver son équilibre hydrostatique lorsqu'une perturbation de pression lui a fait quitter cet état d'équilibre. Une estimation de ce temps de chute libre mène à :

$$t_{ff} \approx (G\bar{\rho})^{-1/2}$$

où G représente la constante gravitationnelle.

Le temps de chute libre est du même ordre de grandeur que la période P . Par exemple, pour le Soleil, t_{ff} est voisin d'une heure.

Le temps de Kelvin

Le temps de Kelvin (t_k) représente la durée nécessaire à une étoile pour retrouver son équilibre thermique lorsqu'une perturbation l'a amenée à le quitter. Il est donc étroitement relié à l'équilibre qui s'établit entre l'énergie créée au coeur de l'étoile par les réactions thermonucléaires et celle que l'étoile dissipe au niveau de sa surface par radiation, tant photonique que neutrinique.

Si E_{th} est l'énergie thermique interne totale de l'étoile et L sa luminosité alors, en première approximation,

$$t_k \approx E_{th}/L$$

L'évocation du temps de Kelvin peut sembler inutile dans le cadre de l'étude des périodes des étoiles variables. Toutefois son intérêt se manifeste lorsqu'on envisage l'amortissement ou l'amplification des pulsations (ce qui sera discuté plus loin) soit, de manière équivalente, lorsqu'on travaille sur l'hypothèse d'adiabaticité : le rapport t_{ff}/t_k permet de savoir si l'hypothèse d'adiabaticité est justifiée ou non.

Le temps nucléaire

L'intérêt du temps nucléaire pour l'étude des oscillations stellaires n'est qu'indirect. De façon assez simplifiée, on peut dire que le temps nucléaire (t_{nucl}) représente la durée nécessaire pour voir les propriétés structurales d'une étoile se modifier suite à son évolution nucléaire (changements dans sa composition chimique interne dus aux réactions thermonucléaires). Une estimation du temps nucléaire donne :

$$t_{nucl} \approx 10^{10} \frac{M/M_{\odot}}{L/L_{\odot}} \text{ (ans)}$$

où M_{\odot} et L_{\odot} expriment respectivement la masse et la luminosité solaires.

Numériquement et d'une façon générale, on observe que $t_{nucl} \approx 10^3 t_k$.

Cette dernière valeur indique qu'il est légitime d'admettre que l'étoile est statique (sa structure interne est figée) et de composition chimique invariante durant l'intervalle de temps correspondant à une pulsation stellaire. Cette considération s'avère très utile pour la simplification des équations de l'hydrodynamique qui traduisent l'évolution des oscillations et que nous abordons à présent.

1.2 Considérations théoriques fondamentales

Après avoir évoqué quelques généralités sur les étoiles variables et les pulsations stellaires, nous allons maintenant aborder deux points essentiels dans la théorie des oscillations non-radiales : les équations qui gouvernent ces pulsations ainsi que l'hypothèse d'adiabaticité et les simplifications, mais aussi les restrictions, que celle-ci impose quant au traitement du problème. Ces deux aspects fondamentaux sont la clé de voûte de tout travail de modélisation portant sur les pulsations non-radiales.

1.2.1 Equations de conservation

Comme la majorité des phénomènes physiques, les pulsations stellaires sont régies par des lois de conservation, qu'il s'agisse de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement ou encore de l'énergie.

Conservation de la masse

La loi de conservation de la masse s'exprime sous la forme de «l'équation de continuité»¹ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

où ρ représente la masse volumique.

Conservation de la quantité de mouvement

Ce principe de conservation traduit essentiellement la deuxième loi de Newton appliquée à un fluide. Cette loi se définit comme :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{P}) = \rho \mathbf{f} \quad (1.2)$$

¹Cette équation reste valable y compris pour une étoile soumise à un vent stellaire (phénomène de perte de masse) puisque les variations locales de densité dues aux flux entrant ou sortant induisent une conservation locale de la masse. En outre, le taux de perte de masse est généralement négligeable (par exemple, pour le Soleil, il est de l'ordre de $10^{-14} M_{\odot}/\text{an}$).

Dans cette équation, \mathbf{P} représente le tenseur de pression, normalement considéré comme symétrique, \mathbf{v} est la vitesse du fluide et \mathbf{f} est la somme vectorielle des forces extérieures appliquées au fluide par unité de masse.

Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie peut s'exprimer de trois façons différentes : *conservation de l'énergie mécanique* ou *conservation de l'énergie thermique* ou enfin *conservation de l'énergie mécanique et thermique*.

L'équation qui traduit la conservation de l'énergie mécanique peut s'obtenir à partir de l'équation (1.2) en écrivant cette dernière sous forme eulérienne puis en divisant par ρ et enfin en formant le produit scalaire des deux membres de l'équation avec \mathbf{v} . Il en résulte :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\frac{1}{\rho}\mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}) + \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \quad (1.3)$$

Cette équation (1.3) souligne que le taux d'accroissement de l'énergie cinétique (par unité de masse) est égal au taux avec lequel le gradient de pression et les forces extérieures produisent leur travail (par unité de masse).

La conservation de l'énergie totale (mécanique et interne) découle de l'équation précédente, en rajoutant les termes relatifs à l'énergie interne :

si E désigne l'énergie interne (ou thermique) et dq/dt le taux net de gain ou de perte de chaleur au cours du mouvement de la particule fluide, il vient alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + E\right) = -\frac{1}{\rho}(\nabla\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \frac{dq}{dt} \quad (1.4)$$

La conservation de l'énergie interne, quant à elle, provient du 1^o principe de la thermodynamique et peut se déduire immédiatement de l'équation (1.4) :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\rho}(\nabla\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}) + \frac{dq}{dt} \quad (1.5)$$

Dans ces équations apparaît la quantité dq/dt , le taux net de gain ou de perte de chaleur. Pour calculer ce taux, il suffit d'écrire que :

$$\frac{dq}{dt} = \epsilon - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{F}$$

où ϵ désigne le taux de production d'énergie nucléaire et \mathbf{F} le flux de chaleur total émergent.

1.2.2 Le champ de gravité

L'équation de Poisson

A elles seules, les équations de continuité sont insuffisantes pour assurer une résolution unique du système d'équations différentielles qu'elles forment. Une équation supplémentaire est nécessaire. Pour cela, nous considérons que la seule force extérieure appliquée aux particules fluides élémentaires en mouvement est la gravité propre de l'étoile. La gravité se manifeste donc dans les équations précédentes par le biais de la force \mathbf{f} . Par conséquent, nous devons calculer \mathbf{f} à partir du potentiel gravitationnel $\psi(\mathbf{r}, t)$, qui à son tour s'obtient d'après l'équation de Poisson :

$$\nabla^2\psi = 4\pi G\rho \quad (1.6)$$

où G traduit la constante gravitationnelle. La résolution de cette équation montre que :

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.7)$$

Il est intéressant de noter que :

- compte-tenu de ce qui précède, la force \mathbf{f} peut être remplacée par \mathbf{g} , l'accélération gravitationnelle
- l'équation de Poisson peut être exprimée comme deux équations différentielles du 1^o ordre et non plus comme une seule équation différentielle du 2^o ordre, ces deux équations étant respectivement l'équation (1.7) et $\nabla \cdot \mathbf{f} = -4\pi G\rho$.

L'approximation de Cowling

Comme cela sera explicité par la suite, la résolution du système formé par les équations différentielles précédentes passe par leur linéarisation au premier ordre. Cette méthode de linéarisation consiste à introduire des petites perturbations des grandeurs (considérées à l'équilibre) qui interviennent dans les équations. Néanmoins, pour ne pas alourdir inutilement les calculs, il est intéressant de négliger certaines de ces petites perturbations. En particulier, on peut sans problème ignorer ψ' qui est la perturbation du potentiel gravitationnel ψ .

Cette approximation se justifie qualitativement par le fait que ψ' est en première approximation une moyenne sur la totalité de l'étoile des effets du potentiel gravitationnel en chaque point de l'étoile et cet effet de moyenne tend à neutraliser les fluctuations locales du potentiel gravitationnel. Cowling (1941) [26] proposa de négliger ψ' . Cette simplification est donc dénommée *approximation de Cowling*. Nous utiliserons l'approximation de Cowling dans la suite de notre travail.

1.2.3 Traitement adiabatique ou non-adiabatique du problème des pulsations stellaires

Comme nous venons de le montrer avec l'approximation de Cowling, il est parfois possible de poser des conditions simplificatrices qui, sans altérer l'exactitude des résultats obtenus *a posteriori*, permettent d'alléger le traitement mathématique du problème des oscillations. Dans la lignée de cette simplification, nous pouvons évoquer l'hypothèse de l'adiabaticité des pulsations.

Conséquences de l'adiabaticité des pulsations

Considérer qu'une oscillation est adiabatique revient à supposer que les éléments de masse oscillants n'échangent aucune chaleur avec leur environnement : au cours d'une oscillation, il n'y a donc ni gain ni perte de chaleur par ces masses élémentaires.

Cette hypothèse d'oscillations adiabatiques est peu réaliste mais elle conduit, dans bien des cas, à une bonne description dynamique des caractéristiques des étoiles variables réelles. En particulier, elle fournit des valeurs très précises pour les périodes des pulsations et des résultats relativement fiables pour l'amplitude relative d'une pulsation dans l'intérieur de l'étoile.

L'adiabaticité d'une pulsation se traduit mathématiquement par la nullité du taux de variation dq/dt , ce qui conduit à la suppression de ce terme dans les équations (1.4) et (1.5) et à l'obtention de l'égalité :

$$\epsilon - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

Limites du traitement adiabatique des pulsations

Si une oscillation est considérée comme parfaitement adiabatique, il n'est pas possible d'obtenir directement des informations sur le comportement thermique de l'étoile.

Par exemple, il n'est pas envisageable de déterminer avec précision comment la luminosité d'une étoile variable va évoluer au cours des pulsations car cette variation résulte d'un effet non-adiabatique. L'hypothèse d'adiabaticité ne peut fournir aucune indication quant à l'existence réelle des modes de pulsation, elle ne véhicule aucune information sur la stabilité de l'étoile face aux pulsations. La raison en est que toute petite oscillation supposée initialement présente dans l'étoile va conserver la même amplitude au cours du temps (puisque l'hypothèse d'adiabaticité implique que le système soit parfaitement conservatif en l'absence d'effets dissipatifs tels que la viscosité).

Critère d'adiabaticité

Avant d'accepter une condition simplificatrice comme l'hypothèse d'adiabaticité, il faut auparavant s'assurer que cette hypothèse est légitime et qu'elle ne perturbe pas significativement l'exactitude des calculs qu'elle implique.

Pour en tester la pertinence, on peut utiliser un critère simple, qui est le rapport entre le temps dynamique (t_{ff}) et le temps de Kelvin (t_k) défini plus haut :

- si $t_{ff}/t_k \rightarrow 0$ alors on peut considérer la pulsation adiabatique
- si $t_{ff}/t_k \rightarrow \infty$ alors la pulsation est fortement non-adiabatique et l'hypothèse d'adiabaticité doit être proscrite absolument.

Ces deux affirmations se comprennent facilement lorsqu'on revient à la définition même de t_{ff} et de t_k , qui expriment en quelque sorte des «temps de récupération» de l'étoile face à des perturbations respectivement dynamiques et thermiques.

Si l'étoile retrouve son équilibre hydrostatique bien plus rapidement que son équilibre thermique (cas où $t_{ff}/t_k \rightarrow 0$) suite à la perturbation qu'engendre la pulsation alors cette dernière n'aura pas pu produire un échange de chaleur entre le milieu environnant et les masses élémentaires oscillantes ; de ce fait l'adiabaticité de l'oscillation est vérifiée.

Par contre si la situation est inversée et que l'étoile retrouve son équilibre thermique bien avant son équilibre dynamique (cas où $t_{ff}/t_k \rightarrow \infty$) après la perturbation causée par la pulsation, alors une interaction aura pu survenir entre les masses élémentaires oscillantes et leur environnement : un échange de chaleur (perte ou gain) est donc possible. Dans ce dernier cas, l'hypothèse d'adiabaticité n'est absolument pas justifiée et le milieu est non-adiabatique : il est le siège d'un éventuel échange de chaleur entre les masses élémentaires oscillantes et leur environnement.

Régions fortement adiabatiques et fortement non-adiabatiques – Approximation quasi-adiabatique et zone de discontinuité

L'utilisation du critère d'adiabaticité montre que la plus grande partie d'une étoile variable peut être considérée comme le siège de pulsations *adiabatiques*. Cependant, et plus précisément dans le cas d'étoiles naines blanches variables, il existe toutefois deux exceptions notoires à cette règle où l'hypothèse d'adiabaticité ne doit surtout pas se faire : il s'agit des couches extérieures de l'enveloppe de l'étoile (où le t_{ff} local peut devenir très supérieur au t_k local) d'une part et des coquilles de fusion de l'hélium d'autre part car ces régions internes de l'étoile sont le siège

de production d'énergie nucléaire et de ce fait : $\epsilon > \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{F}$.

L'intérieur d'une étoile, exception faite des He BS (coquilles d'hélium en fusion nucléaire), est souvent considéré comme *quasi-adiabatique*. Les propriétés d'un milieu quasi-adiabatique sont telles que : $\delta T/T = (\Gamma_3 - 1) \delta \rho/\rho$ et que $\delta L_r/L_r \approx (\delta L_r/L_r)_{ad}$ avec $\Gamma_3 - 1 = (\frac{d \ln T}{d \ln \rho})_{ad}$;

$L_r = 4\pi r^2 F$ représente la luminosité intérieure à rayon \mathbf{r} donné.

Mathématiquement, la *quasi-adiabaticité* autorise une approche de l'intégrale du travail en opérant une simplification sur les fonctions propres, ce qui conduit à une estimation du taux de croissance des modes (κ). Or, dans les couches extérieures non-adiabatiques, la variation de luminosité est «gelée» c'est-à-dire que $\delta L_r/L_r \approx cste$ et ne peut absolument pas être mise en relation avec la variation de luminosité quasi-adiabatique de l'intérieur stellaire. Il existe par conséquent une zone de transition entre les deux régions : intérieur quasi-adiabatique et extérieur non-adiabatique, région intermédiaire que l'on représente comme une couche de faible épaisseur approximativement située sous l'enveloppe de l'étoile d'après la relation :

$$\frac{\langle c_V T_{TR} \rangle (\Delta m)_{TR}}{L \Pi} \sim 1$$

où T_{TR} désigne la température dans la zone de transition.

Le numérateur du membre de gauche de l'équation précédente est à peu près égal à l'énergie interne totale des couches de l'étoile de masse $(\Delta m)_{TR} = M - m_{TR}$ qui reposent sur cette zone de transition ; L est la luminosité à l'équilibre de l'étoile et Π la période du mode considéré. T et c_V sont respectivement les valeurs locales de la température et de la chaleur spécifique par unité de masse à volume constant, toutes deux prises pour l'état d'équilibre de l'étoile. Ainsi, cette zone de transition définit le niveau au-dessus duquel l'énergie interne totale de la portion de l'étoile considérée est du même ordre de grandeur que l'énergie totale rayonnée par l'étoile pendant une période de pulsation.

1.3 Propriétés des pulsations non-radiales

1.3.1 Perturbations en termes d'harmoniques sphériques

Dans le traitement des pulsations stellaires non-radiales, on fait l'hypothèse de linéarité (hypothèse de superposition des solutions) qui consiste à admettre que chaque variable perturbée est une manifestation d'un mode «normal» d'oscillation puis à traiter ce mode normal comme si c'était le seul à se manifester dans l'étoile.

On considère en outre que ce mode est le produit d'une fonction de \mathbf{r} seul par une fonction dépendant seulement des angles θ et ϕ . On admet enfin que cette dernière fonction est proportionnelle à une harmonique sphérique $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ qui prend en compte la structure horizontale du mode.

L'harmonique sphérique $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ se définit grâce à un polynôme de Legendre sous la forme :

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m C(\ell, m) P_\ell^m(\cos \theta) \exp(im\phi)$$

Le degré de l'harmonique sphérique est ℓ et il ne peut prendre que des valeurs naturelles, zéro inclus : $\ell = 0, 1, 2, etc.$ Pour chaque valeur du degré ℓ , il existe $(2\ell + 1)$ valeurs possibles pour m : $m = -\ell, -\ell + 1, ..., \ell - 1, \ell$. On appelle m le nombre (ou l'index harmonique sphérique) azimuthal. A l'aide d'harmoniques sphériques, les perturbations élémentaires d'une quelconque grandeur \mathbf{A} s'expriment sous la forme :

$$\delta A(\mathbf{r}, \theta, \phi, t) = \delta A(\mathbf{r}) Y_\ell^m(\theta, \phi) \exp(i\sigma t)$$

en supposant une dépendance temporelle en $\exp(i\sigma t)$.

1.3.2 Relation de dispersion et fréquences remarquables

En faisant l'approximation de Cowling dans les équations fondamentales qui décrivent les pulsations stellaires et en adoptant le formalisme précédent, il est possible d'établir une relation de dispersion pour les modes de pulsation de l'étoile variable, en supposant que la fonction radiale évoquée ci-dessus est proportionnelle à $\exp(ikr)$.

Le calcul mène à l'équation suivante, qui définit k_r , le nombre d'onde radial :

$$k_r^2 = \frac{1}{\sigma^2 c_s^2} (\sigma^2 - N^2) (\sigma^2 - S_\ell^2) \quad (1.8)$$

Cette équation (1.8) met en évidence plusieurs grandeurs remarquables :

- la fréquence de la pulsation : σ
- la vitesse du son : $c_s^2 = \frac{\Gamma_1 P}{\rho}$, avec l'index adiabatique $\Gamma_1 = (d \ln P / d \ln \rho)_{ad}$
- la fréquence de Brunt-Väisälä (ou fréquence de poussée d'Archimède) : N , telle que :

$$N^2 = \left(\frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \cdot \frac{d \ln P}{dr} \right) \times g$$

Cette fréquence correspond à la fréquence d'oscillation d'un élément de fluide lorsque la gravité est la force de rappel et représente la fréquence d'oscillation des masses élémentaires autour de leur position d'équilibre dans les régions stables vis-à-vis de la convection. Dans les régions convectives, la fréquence de Brunt-Väisälä est imaginaire.

- la fréquence de Lamb (ou fréquence acoustique) : S_ℓ , telle que :

$$S_\ell^2 = \frac{\ell(\ell + 1) \cdot \Gamma_1 P}{r^2 \rho}$$

La fréquence de Lamb traduit la fréquence locale de l'oscillation lorsque la pression est la force de rappel. Elle est par conséquent proportionnelle à la vitesse du son.

1.3.3 Conditions de propagation d'un mode et diagramme-diagnostic

La relation (1.8) montre qu'un mode est oscillatoire (c'est-à-dire que k_r est réel) seulement lorsque sa fréquence d'oscillation est simultanément soit supérieure soit inférieure à S_ℓ et à N (le 1^o cas correspond aux modes de «pression» et le 2^o cas aux modes de «gravité»).

Si $S_\ell < \sigma < N$ ou bien $N < \sigma < S_\ell$, le mode est alors évanescent (c'est-à-dire que k_r est imaginaire) et son amplitude diminue exponentiellement au cours de sa propagation dans la zone d'évanescence.

De façon générale, la fréquence de Lamb est semblable d'une étoile à une autre (on a toujours $S_\ell \propto 1/r$ où r exprime le rayon partiel de l'étoile, entre son centre et le point considéré).

Par contre, la fréquence de Brunt-Väisälä n'a pas de comportement universel.

Son profil en fonction du rayon partiel de l'étoile diffère (parfois considérablement) entre deux étoiles et même au sein d'une même étoile prise à des stades évolutifs différents.

Afin de connaître le comportement d'un mode de fréquence donnée (mode oscillatoire ou évanescent) au cours de sa propagation dans l'étoile, il peut être intéressant de dresser un diagramme-diagnostic. On réalise un diagramme-diagnostic en traçant sur un même graphe les fréquences

caractéristiques S_ℓ et N en fonction du rayon r de l'étoile variable étudiée. Il est alors possible de séparer les régions évanescentes des régions oscillatoires et ainsi de connaître précisément le comportement d'un mode de fréquence donnée.

1.3.4 Description des modes p , g et f

- les modes \mathbf{p} , aussi appelés *modes de pression* ou *modes acoustiques*, ont une fréquence d'oscillation $\sigma > \max(S_\ell, N)$.
Ces modes se propagent dans l'enveloppe superficielle de l'étoile. Ils sont essentiellement radiaux et se caractérisent par des variations eulériennes de pression et de densité relativement importantes pendant la durée d'une oscillation. La fréquence de ces modes dépend de l'ordre radial k de telle sorte que : $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k \rightarrow \infty$.
- les modes \mathbf{g} , également dénommés *modes de gravité*, ont une fréquence d'oscillation telle que $\sigma < \min(S_\ell, N)$. Au sein des étoiles ZZ Ceti, ils se propagent dans les couches extérieures de l'étoile car, dans le noyau dégénéré, la fréquence de Brunt-Väisälä décroît et tend à s'annuler. Ce sont des modes principalement transverses et ils se manifestent par des variations eulériennes de pression et de densité relativement faibles au cours des oscillations. La fréquence des modes \mathbf{g} est fonction de l'ordre radial k de sorte que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k \rightarrow 0$.
- Le mode \mathbf{f} ou encore *le pseudo mode Kelvin*. Il s'agit du mode d'ordre radial $k = 0$, sauf pour le degré sphérique $\ell=1$ pour lequel il correspond à l'ordre radial $k = 1$ (cas du Soleil, par exemple). C'est le mode non-radial dont les caractéristiques se rapprochent le plus de celles d'un mode purement radial. Sa fréquence d'oscillation a une valeur comprise entre celle des modes \mathbf{p} et \mathbf{g} de plus bas degré sphérique.

1.4 Mécanismes d'excitation et d'amortissement des modes

Après avoir présenté les caractéristiques fondamentales des modes d'oscillation non-radiale, nous allons maintenant évoquer les deux mécanismes principaux qui sont responsables de ces pulsations stellaires. Il s'agit du ϵ -mécanisme et du κ -mécanisme. Mais, auparavant, il faut introduire un critère de stabilité de l'étoile par rapport à d'éventuelles pulsations.

1.4.1 Stabilité de l'étoile face aux pulsations stellaires

Dans une étoile, l'énergie s'évacue en général librement et calmement grâce au gradient thermique qui s'établit du centre vers la surface même si de petites perturbations aléatoires viennent occasionnellement contrarier la fluidité de ce flux.

L'équilibre persiste aussi longtemps que ces perturbations (nées de deux forces de rappel : la pression ou la gravité) s'estompent rapidement, leur amortissement étant provoqué par des phénomènes dissipatifs comme les pertes radiatives, l'interaction avec la convection, *etc.*

Ces effets non-adiabatiques s'opposent efficacement au mouvement des masses élémentaires oscillantes ainsi qu'à la compression (ou à l'expansion) locale du milieu.

Des grandeurs thermodynamiques telles que les dérivées de la température et de l'opacité affectent l'équilibre local. En général, si la matière stellaire est comprimée, sa température augmente lorsque son opacité diminue. Une température plus élevée accroît la quantité de rayonnement qui doit s'évacuer dans la matière environnante, alors qu'une opacité diminuée réduit l'efficacité avec laquelle le rayonnement est absorbé par l'environnement des masses oscillantes.

Or, de la première loi de la thermodynamique, nous savons qu'une augmentation de température couplée à une perte de chaleur implique que du travail est apporté à la masse élémentaire pendant l'expansion. De ce fait, toute petite perturbation initiale sera rapidement amortie, chaque masse oscillante élémentaire ayant besoin de recevoir du travail dans le cas contraire.

Le fait qu'une région perde de la chaleur lorsqu'elle est comprimée et en gagne lorsqu'elle se dilate constitue un critère fondamental de stabilité.

Lorsque la situation inverse se présente et que du travail est fourni par les éléments de masse lors de la compression et de l'expansion, des perturbations infinitésimales peuvent alors prendre naissance, s'amplifier et se propager pour produire les variations lumineuses observées à la surface des étoiles variables.

L'étude de la stabilité d'un mode de pulsation donné est en définitive un bilan énergétique global opéré sur l'ensemble de la cavité de propagation pour un mode stationnaire.

1.4.2 le ϵ -mécanisme

Une perturbation de luminosité dans l'étoile (par exemple due à la présence d'une coquille d'hélium en fusion nucléaire) modifie localement la température. Cette modification perturbe le taux de production d'énergie nucléaire ϵ et ainsi engendre une instabilité dans l'étoile (selon le processus évoqué ci-dessus). C'est le ϵ -mécanisme. Celui-ci est identique pour les pulsations radiales et non-radiales, à la différence près que les effets du ϵ -mécanisme sont peu importants pour les pulsations radiales dans la mesure où l'amplitude de ces oscillations est bien plus faible dans l'intérieur de l'étoile que dans son enveloppe.

1.4.3 le κ -mécanisme

Si l'opacité (κ) augmente sous l'effet de la compression, le flux de chaleur est alors piégé plus efficacement autour d'une masse élémentaire oscillante et donc du travail est communiqué à l'environnement de cette masse. Par conséquent les régions de l'étoile où ce phénomène se réalise sont en mesure de déstabiliser celle-ci. Ce moyen d'exciter les pulsations constitue le κ -mécanisme.

Une région de l'étoile pourra exciter une pulsation au moyen de ce mécanisme si la dérivée de son opacité satisfait la relation :

$$\frac{d}{dr}(\kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_3 - 1}) > 0 \quad (1.9)$$

avec $\kappa_T = (\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T})_\rho$ et $\kappa_\rho = (\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho})_T$ (κ est l'opacité, exprimée en cm^2/g)

L'équation (1.9) est d'autant mieux satisfaite dans une étoile qu'un élément chimique (hélium, hydrogène, *etc*) est partiellement ionisé. En particulier, κ_T augmente généralement dans la partie la plus chaude (la plus interne) d'une zone d'ionisation partielle et diminue dans sa partie la plus froide (la plus extérieure).

Ainsi, l'intérieur d'une zone d'ionisation peut exciter une pulsation alors que l'extérieur de cette même zone peut au contraire l'amortir. L'optimisation du κ -mécanisme constitue le γ -mécanisme. Physiquement, le γ -mécanisme traduit la conversion d'une fraction du travail de la compression en ionisation plus avancée de l'espèce chimique considérée. Ce phénomène a tendance à comprimer davantage les particules élémentaires, ce qui favorise l'instabilité.

La libération de cette énergie d'ionisation pendant l'expansion stimule à son tour la perturbation. Puisqu'elles surviennent simultanément, les instabilités résultant des effets de l'opacité et de l'ionisation sont appelées « $\kappa - \gamma$ -mécanisme».

Deux conséquences importantes découlent de ce qui précède :

- les effets d’amortissement ou d’excitation des pulsations stellaires sont clairement non-adiabatiques puisqu’ils reposent sur un échange (gain ou perte) de chaleur entre les masses oscillantes et leur milieu environnant. Ces effets ne peuvent donc pas être pris en compte dans une modélisation adiabatique des pulsations d’étoiles variables
- l’instabilité globale d’un mode de pulsation se manifeste seulement lorsque le travail produit par les zones d’excitation dépasse celui effectué par les régions d’amortissement que la pulsation rencontre sur un cycle complet d’oscillation. Dans ce cas de figure, le flux d’énergie thermique peut générer un travail mécanique, ce travail étant ensuite converti en pulsations observables à la surface de l’étoile variable.

1.5 Influences diverses sur les modes de pulsation

1.5.1 Rôle de la rotation et des champs magnétiques

La rotation

Inclure la rotation dans la modélisation d’une étoile variable complique sensiblement le problème des pulsations non-radiales de l’étoile. Les complications induites par la rotation découlent pour la plupart de la non-sphéricité de l’étoile, qui résulte à son tour de la force centrifuge. Ainsi, les éléments de masse dans une étoile à la fois *variable* et *en rotation* sont soumis, au cours de leurs oscillations, à deux forces supplémentaires, en plus des forces habituelles : la force *centrifuge* et la force *de Coriolis*. On fait généralement l’hypothèse d’adiabaticité lorsqu’on étudie l’influence de la rotation stellaire sur les pulsations et on considère aussi l’effet de la rotation sur les modes de pulsation dans le cadre de l’approximation d’une rotation faible. De nombreuses études ont été entreprises (Ledoux, 1945 [63] ; Cowling & Newing, 1949 [27] ; Ledoux & Walraven, 1958 [64] ; Chandrasekhar, 1972 [21]) et ont toutes abouti à la conclusion que la rotation a une action stabilisatrice sur les pulsations stellaires.

La rotation a par ailleurs une action importante et intéressante sur les modes de pulsation puisqu’elle lève la dégénérescence qui affecte le nombre azimuthal m des harmoniques sphériques. En effet, l’index harmonique sphérique m n’apparaît jamais dans les équations des oscillations des étoiles sphériques statiques. De ce fait, les fréquences propres des oscillations non-radiales de ces étoiles sont $(2\ell + 1)$ fois dégénérées pour chaque mode. Dans une étoile en rotation, cette dégénérescence est entièrement levée : l’unique fréquence propre correspondant à une valeur donnée de ℓ dans une étoile sans rotation se divise en $(2\ell + 1)$ sous-niveaux qui correspondent chacun à $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$.

Cette démultiplication des fréquences est symétrique (pour une rotation faible) autour de la fréquence correspondant à $m = 0$ (qui est équivalente à l’unique fréquence qui se manifeste pour une étoile sans rotation) et la différence de fréquence entre des sous-niveaux successifs augmente avec la vitesse de rotation de l’étoile (cette division est quelque peu comparable par analogie à l’effet Zeeman en physique quantique).

L’expression analytique des fréquences démultipliées par la rotation peut s’écrire : $\sigma = \sigma_0 + \sigma'$ où σ_0 désigne la fréquence de l’unique mode obtenu en l’absence de rotation stellaire et σ' est le terme dû à la rotation tel que : $\sigma' = -m \times \Omega(1 - C)$. La grandeur C dépend de la structure de l’étoile variable et des propriétés de ses oscillations adiabatiques. En règle générale, $0 \leq C \leq 1$. L’expression exacte de C a été obtenue par Ledoux et Walraven (1958) [64] dans le cadre de

l'approximation d'une rotation faible, elle se définit avec le formalisme de ces auteurs comme :

$$C = \frac{\int_0^R \rho r^2 dr [2ab + b^2]}{\int_0^R \rho r^2 dr [a^2 + \ell(\ell + 1)b^2]}$$

où a représente le déplacement élémentaire dans la direction radiale et b le déplacement élémentaire dans la direction tangentielle. Il est intéressant de noter que, pour les modes \mathbf{g} (c'est-à-dire pour les modes dont la composante de vitesse verticale est négligeable devant la composante de vitesse horizontale), $|a(r)| \ll |b(r)|$. Il en résulte que pour de tels modes : $C \approx 1/[\ell(\ell + 1)]^2$.

Les champs magnétiques

Des éléments de masse élémentaire dans des étoiles avec champ magnétique sont sujets à des forces électromagnétiques, en plus des forces habituelles.

Il semblerait que la présence d'un champ magnétique ne lève que partiellement la dégénérescence sur le nombre azimuthal m (contrairement à la rotation qui effectue une levée totale de la dégénérescence).

En effet, des oscillations non-radiales avec $m \neq 0$ correspondent à des ondes progressives azimuthales dont la direction du déplacement dépend du signe de m . Sous l'influence de la rotation, la direction de propagation de l'onde est soit prograde soit rétrograde et ainsi le signe de m a un effet physique. Dans le cas d'un champ magnétique, si l'étoile non-variable est à symétrie axiale, il n'y a aucune distinction véritable entre $+m$ et $-m$, c'est-à-dire que seule la valeur absolue $|m|$ importe. La levée de la dégénérescence n'est donc que partielle.

1.5.2 Rôle de la convection

Lorsqu'on considère les effets de la convection sur les étoiles variables, on envisage en général deux aspects de cette interaction. Le premier porte sur la structure statique de l'étoile et le second concerne l'influence de la convection sur les pulsations elles-mêmes.

Le premier effet se traite en principe en utilisant la théorie de la longueur de mélange (ce qui est discuté à la fin de ce Chapitre).

On admet que c'est, entre autres choses, la convection présente dans l'enveloppe de l'étoile qui délimite le bord rouge d'une bande d'instabilité (Baker et Kippenhahn, 1965 [1]). Une faible zone convective serait suffisante pour mettre un terme aux oscillations sur le bord rouge d'une bande d'instabilité (Deupree, 1977 [32]). L'étude des effets de la convection sur les pulsations est en cours de développement (Goldreich & Wu, 1999 [44] [45] & 2001 [93]).

1.6 Rôle et enjeux de l'astérosismologie

1.6.1 Définition de l'astérosismologie

L'astérosismologie représente un outil d'investigation par sondage des intérieurs stellaires. C'est une technique qui repose sur l'étude des modes d'oscillation radiale ou non-radiale. Dans cette thèse, nous nous intéressons tout particulièrement aux pulsations non-radiales des ZZ Ceti. En pratique, l'utilisation de la sismologie stellaire passe par la détection et la mesure des caractéristiques des modes propres d'oscillation des étoiles. On utilise leurs propriétés pour comprendre la structure de l'intérieur des étoiles qui en sont le siège.

²Ce résultat n'est pas spécifique aux naines blanches variables de la classe des ZZ Ceti mais pour toute étoile variable qui pulse selon des modes \mathbf{g} .

La théorie de l'astérosismologie est bien connue. Elle bénéficie de développements déjà anciens de la géophysique et de l'héliosismologie (astérosismologie qui étudie le Soleil). Cette théorie s'appuie sur la mécanique et la thermodynamique et permet, en principe, de déduire la structure de l'étoile en interprétant son spectre de fréquence. Cette méthode est par ailleurs l'unique façon de connaître la structure interne des étoiles.

1.6.2 Les principaux outils de l'astérosismologie

Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons les principales techniques mises en oeuvre par l'astérosismologie ainsi que les informations qu'elles nous apportent sur la détermination de la masse totale de l'étoile, sur la masse de son enveloppe externe, son taux de contraction et sa vitesse de rotation, *etc.*

L'espacement de période des modes g et la masse totale de l'étoile variable

Les périodes d'un mode g de degré sphérique ℓ donné augmentent régulièrement lorsque l'ordre radial k croît. La raison en est que la force de rappel est proportionnelle à la masse totale déplacée et que cette masse diminue lorsque l'ordre radial augmente. Une force de rappel plus faible implique une période plus longue (Cox, 1980 [30]).

Dans le cas de modes g d'ordre radial k très élevé, on peut considérer que la longueur d'onde radiale quantique du mode est très inférieure aux différentes échelles de distance sur lesquelles les grandeurs physiques significatives varient lors d'un cycle de pulsation. Il est donc possible de faire une «approximation asymptotique» qui conduit à une relation simple traduisant les périodes des modes g considérés :

$$P_k \simeq \frac{P_0}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}(k + \epsilon) \quad k \gg \ell \quad (1.10)$$

L'équation (1.10) fait intervenir P_k (la période du mode g d'ordre radial k élevé considéré) et P_0 est une constante qui est fonction de la structure globale de l'étoile variable.

Kawaler (1987) [53] a montré que cette constante dépend essentiellement de la masse totale de l'étoile ($P_0 \propto M_\star$). Enfin, la constante supplémentaire ϵ est considérée comme faible et sa valeur exacte dépend des conditions limites et donc de la structure interne de l'étoile .

Cette équation montre que les modes de pulsation de degré ℓ constant et d'ordres radiaux élevés doivent présenter des périodes consécutives identiquement espacées entre elles.

Ces modes doivent former une séquence qui repose sur un espacement de période fondamental $\Delta P = P_0 / \sqrt{\ell(\ell+1)}$.

Lorsqu'on parvient à identifier cet espacement de période (ΔP) dans la Transformée de Fourier (en périodes) de la courbe de lumière d'une étoile variable, on le compare à celui fourni par des modèles pour retrouver la structure interne de l'étoile. En particulier, ΔP renseigne avec une bonne précision sur la masse totale de l'étoile variable sondée.

Le piégeage des modes et la masse de l'enveloppe externe de l'étoile

Dans le cas idéal d'une étoile homogène ayant une composition chimique uniforme, les périodes de modes g d'ordres radiaux élevés doivent présenter un espacement de périodes constant entre elles. Or, les naines blanches ont une composition chimique stratifiée, avec un coeur dégénéré de carbone (ou éventuellement de **C+O**), et des couches externes composées d'hélium et/ou d'hydrogène. Cette vision quelque peu globale peut être précisée : il y a les DA avec un coeur de **C/O**, une couche d'**He** et une enveloppe superficielle d'**H** ; les DB avec la même structure mais dépourvues d'**H** et les PG 1159 qui possèdent un coeur **C/O** et une enveloppe **He+C+O** (+**N**

à l'état de traces pour certaines d'entre elles). La condition sur laquelle repose la simplification asymptotique n'est plus respectée au niveau des zones de transition puisque le poids moléculaire moyen μ change plus rapidement que la fonction d'onde d'ordre k le plus élevé (phénomène de « μ -gradient»). Par ailleurs, ces fortes variations de la composition chimique de l'étoile induisent des gradients, également conséquents, dans la densité de l'étoile, ce qui a pour effet d'entraîner localement des changements rapides dans les fréquences caractéristiques N et S_ℓ .

Ces variations au niveau des fréquences de Lamb et de Brunt-Väisälä sont à l'origine d'un phénomène appelé *piégeage des modes*. En effet, l'amplitude de la fonction propre des modes qui présentent des noeuds au niveau des zones de transition chimique de l'étoile post-AGB est fortement réduite en-deçà de cette zone de discontinuité car le mode se réfléchit essentiellement et seule une faible fraction de son amplitude est transmise en-deçà de la zone de discontinuité.

Les modes correspondants sont qualifiés de *modes piégés* (dans l'enveloppe externe, au-dessus de la zone de discontinuité chimique) et leur période est différente de celle qu'ils devraient avoir dans le cadre de l'approximation asymptotique d'après l'équation (1.10).

Les modes qui suivent un mode piégé présentent des noeuds qui se situent au-delà de la zone de discontinuité et leur période se rapproche de l'expression analytique de l'équation (1.10).

Ce cycle de va et vient autour de l'espacement de période moyen est connu sous le nom de *trapping cycle* (Brassard et al., 1992 [13]; Bradley, 1994 [9]). Le *trapping cycle* dépend de la profondeur de la zone de transition de la composition chimique responsable du piégeage. Plus la discontinuité est profonde dans l'étoile, plus court est le cycle de piégeage.

La modélisation nous permet de localiser l'emplacement de la zone de discontinuité et donc de connaître avec précision l'épaisseur (donc la masse) des couches externes de l'étoile.

Winget et al. (1981) [87] ont suggéré que le piégeage des modes pourrait fournir un mécanisme naturel de sélection pour les modes des étoiles ZZ Ceti et que ce dernier pourrait être responsable de la sélection d'un faible nombre de pulsations parmi l'ensemble des modes g potentiellement observables. Ils remarquèrent que quelques modes de naines blanches (stratifiées chimiquement) résonnent avec l'épaisseur de la couche d'hydrogène, ce qui a pour effet de réfléchir l'énergie de l'onde de l'oscillation correspondante au niveau de l'interface \mathbf{H}/\mathbf{He} : ces modes se retrouvent donc *piégés* dans la fine couche extérieure d'hydrogène. Les modes piégés ont en outre les taux de croissance les plus élevés, ce qui suppose que ce sont eux qui ont la plus forte probabilité d'être observés à la surface des naines blanches variables.

Toutefois, le fait que les modes de plus grande amplitude observés ne correspondent pas nécessairement à des modes piégés (ce qui se vérifie par la modélisation et le calcul de l'énergie cinétique pour les modes du modèle retenu; ce qui sera explicité par la suite), ce mécanisme de sélection ne semble pas universel; il y a de nombreux contre-exemples comme RXJ 2117+3412 (Noyau de Nébuleuse Planétaire Variable)

Les modes piégés se caractérisent aussi par des espacements plus courts par rapport aux modes voisins dans une séquence de modes de degré ℓ constant et d'ordres k croissants.

L'espacement de périodes ΔP en fonction de P est un diagnostic important pour le piégeage des modes, les minima de ΔP traduisant directement les modes piégés.

En outre, l'espacement de période entre modes piégés dépend directement de la position, au sein de l'étoile, de l'interface \mathbf{H}/\mathbf{He} (et par conséquent de l'épaisseur de la couche d' \mathbf{H}). Plus cette couche est mince, plus cet espacement de période entre modes piégés est important (Brassard et al., 1991) [12]. En résumé, Brassard et al. (1991) [12] ont démontré que, toutes choses étant égales par ailleurs, l'espacement de période entre modes piégés s'accroît lorsque :

- la masse totale de l'étoile diminue
- la T_{eff} de l'étoile diminue
- la masse de l'enveloppe d'hydrogène diminue
- l'efficacité convective augmente.

Propriétés physiques du piégeage des modes

Pour rendre compte physiquement du phénomène de piégeage des modes, il faut tout d'abord considérer la fréquence de Brunt-Väisälä exprimée sous la forme suivante :

$$N^2 = \frac{g^2 \rho}{P} \frac{\chi_T}{\chi_P} (\nabla_{ad} - \nabla + B)$$

avec $B = \frac{-1}{\chi_T} \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln Y} \right)_{\rho, T} \cdot \left(\frac{d \ln Y}{d \ln P} \right)$ où Y désigne l'abondance d'hélium en fraction de masse.

B traduit la contribution du gradient de la composition chimique dans l'expression de la fréquence de Brunt-Väisälä.

Dans les étoiles naines blanches, $B \rightarrow 0$ et ne devient véritablement non-négligeable qu'au niveau des interfaces **H/He** et **He/C**. Ce terme B a pour effet de modifier brusquement l'aspect de $\log N^2 = f[\log(1 - \frac{M(r)}{M_\star})]$. Cette rapide modification est à l'origine des propriétés de filtrage et de sélection des modes ; une zone convective introduit un puits alors qu'une discontinuité chimique entraîne un pic dans le profil de N^2 .

En conclusion, le phénomène de piégeage des modes peut s'opérer dès lors que N^2 varie rapidement dans le cas d'une zone convective ou d'une interface chimique par exemple.

En outre, un mode piégé est moins amorti qu'un mode ordinaire puisque l'amortissement intervient dans le coeur des naines blanches c'est-à-dire dans des régions où l'amplitude de leur fonction propre est sensiblement diminuée par rapport à celle des autres modes. Ceci renforce encore l'effet de sélection et suggère à nouveau que les modes observés à la surface des étoiles variables seraient préférentiellement des modes piégés.

Par ailleurs, lorsque la masse d'hydrogène d'une ZZ Ceti augmente, l'étoile perd progressivement son aptitude à sélectionner les modes piégés car la différence d'énergie cinétique entre les différents modes diminue (ce qui sera exposé en détail au Chapitre 2).

Aussi, si le spectre de période d'une ZZ Ceti met en évidence la présence de modes piégés, il est probable que l'étoile ne possède pas une couche d'**H** épaisse.

Caractérisation des modes piégés selon le formalisme de Dziembowski :

En termes de variables de Dziembowski (1971) [34], l'énergie cinétique d'un mode dépend de la composante y_1 (qui traduit les déplacements dans la direction radiale) et de la composante y_2 (qui mesure les déplacements transverses) de la fonction propre du mode. Dans les naines blanches, le déplacement total est largement dominé par les déplacements horizontaux, ce qui implique que l'énergie cinétique d'un mode est essentiellement gouvernée par le comportement de y_2 . Pour un modèle donné et pour une valeur de ℓ fixée, les noeuds de y_1 et de y_2 se déplacent vers la surface de l'étoile lorsque l'ordre radial k augmente.

En outre, un noeud donné de y_1 se situe toujours au-dessus du noeud de y_2 qui lui correspond. Cela nous permet de définir une condition de piégeage d'un mode : *"pour un mode donné, si la composante radiale (y_1) de la fonction propre présente un noeud juste au-dessus de l'interface **H/He** et, qu'au même instant, le noeud de la composante tangentielle (y_2) de la fonction propre qui lui correspond se situe juste au-dessous de cette même interface, on peut alors considérer que le mode est piégé dans la couche d'hydrogène."* (Brassard et al., 1991 [12]).

Modes piégés et énergie cinétique :

Comme nous venons de l'évoquer, un mode piégé est moins amorti qu'un mode ordinaire, ce

qui a une incidence sur son énergie cinétique, qui s'exprime comme : $E_c = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_V |\delta r|^2 \rho dV$ où σ désigne la fréquence propre, V le volume total, ρ la densité et δr le déplacement lagrangien. Brassard et al. (1991) [12] ont montré qu'un mode piégé peut être détecté grâce à la valeur de son énergie cinétique.

En effet, lors d'une représentation graphique du *period spacing* ΔP , les minima locaux de la courbe ΔP vs. P qui correspondent à des minima locaux de la valeur de l'énergie cinétique traduisent que le mode correspondant est un mode piégé.

Nous illustrons cette propriété à l'aide de deux exemples.

Nous avons modélisé une ZZ Ceti de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $T_{eff}=11430$ K et $M(He)/M_\star = 10^{-4}$. Nous avons calculé ses modes de pulsation adiabatiques de degré sphérique $\ell = 1$ puis $\ell = 2$. La description du sous-programme de calcul des oscillations adiabatiques sera exposée dans le Chapitre 3. Nous avons ensuite évalué l'énergie cinétique correspondant à chacun de ses modes de pulsation puis nous avons représenté graphiquement E_c vs. P et ΔP vs. P pour chaque valeur de ℓ .

Les modes de pulsation sont exprimés dans la Table 1-1 pour le degré sphérique $\ell=1$ et dans la Table 1-2 pour le degré $\ell=2$; les périodes étant arrondies à la seconde près.

La Fig. 1.2 représente l'énergie cinétique des modes en fonction de leur période respective pour le degré sphérique $\ell=1$, la Fig. 1.4 pour le degré $\ell=2$; la Fig. 1.3 traduit la variation du *period spacing* en fonction de la période des modes pour le degré sphérique $\ell=1$ et la Fig. 1.5 pour le degré $\ell=2$.

Table 1-1. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=1$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $M(He)/M_\star = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P (s)	393	445	507	588	649	704	742	811	866	917	1011	1075	1133
ΔP (s)	69	52	62	81	61	55	38	69	55	51	94	64	58
$\log E_{cin}$	46.8	45.6	45.0	44.5	43.3	42.5	42.0	42.9	42.9	43.0	42.9	42.6	42.5

k	16	17	18	19	20	21
P(s)	1219	1276	1340	1384	1444	1515
ΔP (s)	86	57	64	44	60	71
$\log E_{cin}$	41.9	41.2	40.8	41.3	41.6	41.5

Table 1-2. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=2$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $M(He)/M_\star = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P (s)	132	190	249	279	305	350	383	409	429	477	511	545	586
ΔP (s)	—	58	59	30	26	45	33	26	20	48	34	34	41
$\log E_{cin}$	47.7	46.8	45.4	45.1	44.8	43.8	42.8	42.0	41.6	42.4	42.4	42.9	42.5

k	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
P (s)	628	659	706	738	775	806	839	876	914	961	985	1034	1062
ΔP (s)	41	31	47	32	37	31	33	37	38	47	24	49	28
$\log E_{cin}$	42.1	42.3	41.4	40.8	40.4	41.0	41.3	41.1	41.4	41.2	40.9	40.4	40.3

k	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
P (s)	1098	1135	1169	1227	1262	1300	1330	1369	1405	1432	1474	1512
ΔP (s)	36	37	34	58	35	38	30	39	36	27	42	38
$\log E_{cin}$	40.7	41.0	41.2	41.1	41.2	41.3	40.6	40.5	40.8	41.0	41.3	41.1

La comparaison des minima locaux montre que le spectre de période des pulsations du modèle présente des modes piégés, tant pour le degré sphérique $\ell = 1$ que pour le degré $\ell = 2$; par exemple le mode de degré $\ell=1$ et d'ordre $k=9$ de période 742 s et d'énergie cinétique $\log E_c=42.0$ ou encore le mode de degré $\ell=2$ et d'ordre $k=9$ de période 429 s et d'énergie cinétique $\log E_c=41.6$. Nous reviendrons sur ce point important qu'est l'énergie cinétique des modes dans le Chapitre 2.

Le «*rotational splitting*» et la vitesse de rotation de l'étoile

Comme nous l'avons évoqué, la rotation lève la dégénérescence qui affecte l'index azimuthal m de l'harmonique sphérique Y_ℓ^m en permettant à des modes d'un même multiplet, associés à des valeurs de m non identiques, de présenter des fréquences différentes. La rotation produit une séparation «fine» des fréquences d'oscillations d'un multiplet comparable à la structure fine de

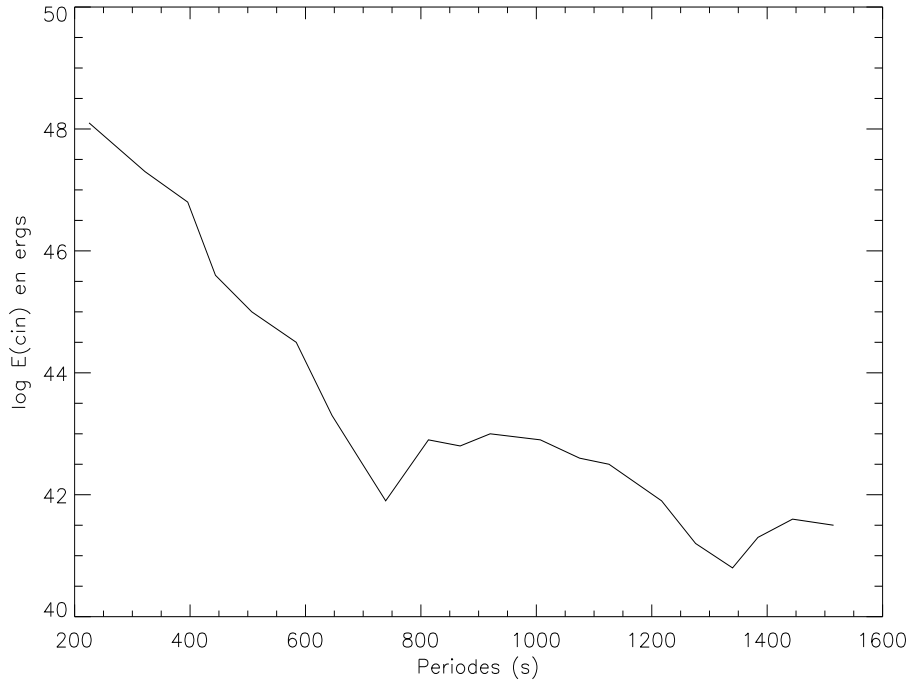


FIG. 1.2 – *Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell=1$) pour un modèle de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $M(He)/M_\star = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K*

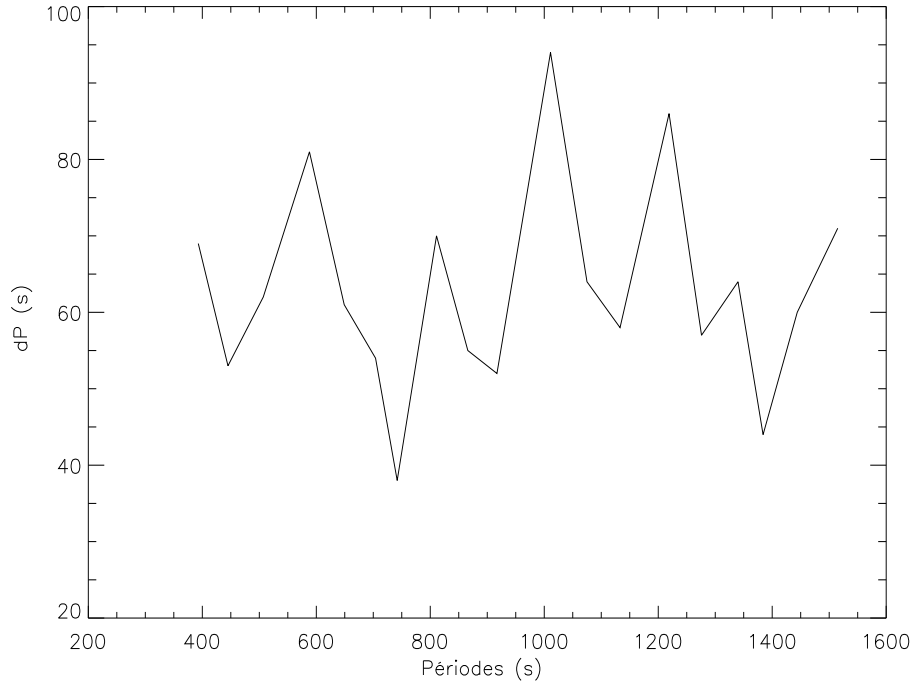


FIG. 1.3 – *Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell=1$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.55 M_{\odot}$ avec $M(H)/M_{\star} = 10^{-10}$, $M(He)/M_{\star} = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K*

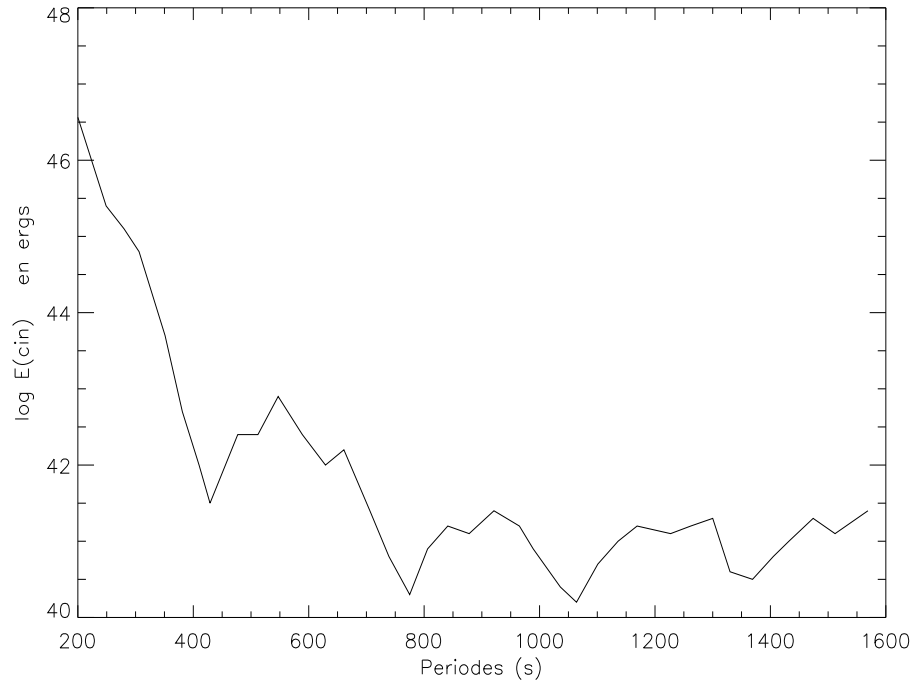


FIG. 1.4 – *Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell=2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.55 M_{\odot}$ avec $M(H)/M_{\star} = 10^{-10}$, $M(He)/M_{\star} = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K*

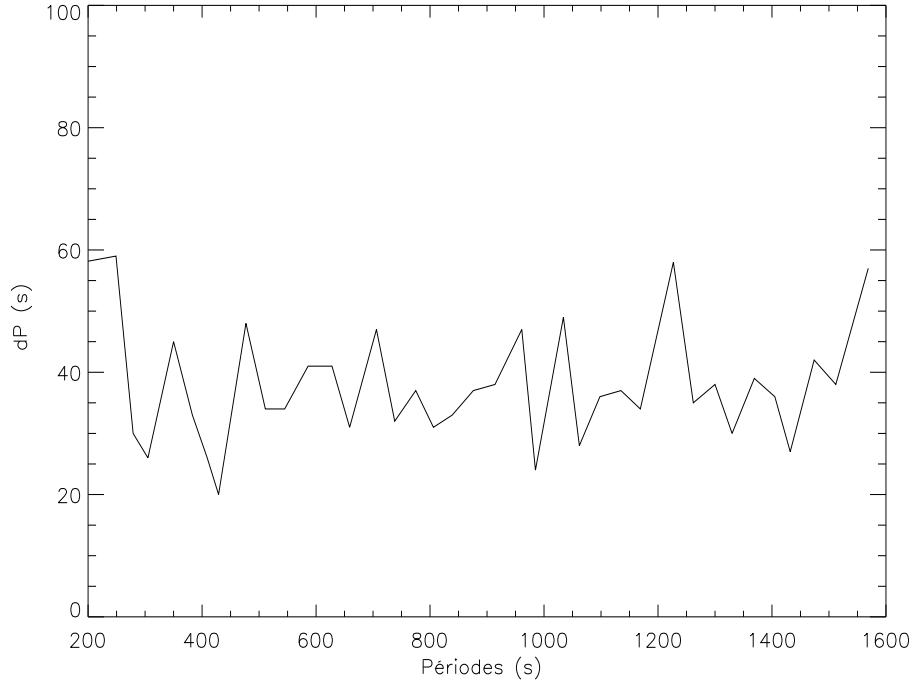


FIG. 1.5 – *Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell=2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.55 M_{\odot}$ avec $M(H)/M_{\star} = 10^{-10}$, $M(He)/M_{\star} = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K*

l'effet Zeeman des raies spectrales atomiques. Pour ce faire, la rotation augmente la fréquence des composants à $m < 0$ du multiplet et la diminue pour les composants à $m > 0$ par rapport à la fréquence du mode à $m = 0$ qui n'est pas altérée.

Comme, pour ℓ donné, il existe $(2\ell + 1)$ valeurs possibles de m , des modes de degré sphérique $\ell = 1$ correspondent à des triplets, de degré $\ell = 2$ à des quintuplets, *etc.*

La séparation en fréquence, δf , qui s'observe entre 2 pics de la Transformée de Fourier de nombres m consécutifs dépend directement de la période de rotation de l'étoile :

$$\delta\nu_{k\ell} = \Omega_{rot}^{-1} \times (1 - C_{k,\ell}) \quad (1.11)$$

avec, comme souligné plus haut, $C_{k,\ell} \approx [\ell(\ell+1)]^{-1}$ pour des naines blanches variables (Brickhill, 1975 [16]). A partir de cette équation (1.11), il est alors possible de déduire la période de rotation de l'étoile si l'on parvient à identifier le degré ℓ des modes étudiés (par exemple à partir du nombre de composants du multiplet), ce qui ne serait pas facile à réaliser si tous les modes de différents degrés ℓ et nombres m se retrouvaient simultanément dans le spectre de l'étoile !

On n'observe généralement pas les modes de degré $\ell > 2$ dans les spectres d'étoiles naines blanches. En effet, lorsque le degré ℓ croît, les lignes nodales à la surface de l'étoile augmentent et les régions, brillantes ou sombres, de chaque côté de ces lignes tendent à s'annuler mutuellement lorsqu'on les observe à très grande distance (effet de moyenne géométrique). De ce fait, on n'observe que le changement de luminosité totale de l'étoile intégrée sur la totalité de sa surface visible, ce qui rend les modes de degré ℓ élevé indétectables (Dziembowski, 1977 [35]).

Le changement de période séculaire et le taux de contraction de l'étoile

Lorsque les étoiles variables évoluent, la période des modes de pulsation varie consécutivement au changement de leur structure. Cette mesure de dP/dt (\dot{P}) est utilisée pour contraindre le temps caractéristique d'évolution des étoiles. En effet, le refroidissement du noyau de l'étoile variable d'une part et la contraction des couches extérieures d'autre part vont provoquer l'augmentation des périodes de pulsation. Le taux (\dot{P}) avec lequel les périodes de pulsation changent fournit une mesure des échelles de temps de refroidissement. En outre, la mesure de ce taux permet de déterminer le nombre atomique moyen de la matière stellaire présente dans le coeur de l'étoile, lorsqu'on connaît sa masse et sa T_{eff} .

Les valeurs issues des modèles mettent en évidence plusieurs caractéristiques générales :

- \dot{P} a tendance à augmenter avec la période des pulsations
- les modes piégés ont des valeurs de \dot{P} plus faibles que les autres car leurs fonctions propres dépendent de la profondeur de la zone de transition coeur/enveloppe, profondeur qui varie graduellement par rapport aux échelles de temps de l'évolution stellaire.

Cependant, ces changements de périodes sont si faibles qu'ils nécessitent des observations sur le long terme (par exemple, étude du \dot{P} de G117 B15A par Kepler et al.). De plus, l'étude du \dot{P} implique que l'étoile présente des pulsations stables et complètement résolues.

1.6.3 Conclusion

L'astérosismologie offre différents outils qui permettent d'obtenir des informations fiables et précises sur la structure interne des étoiles variables :

- le «*period spacing*» entre les modes renseigne sur la masse totale de l'étoile observée
- le «*trapping cycle*» apporte des contraintes sur la masse de l'enveloppe externe de l'étoile
- le «*rotational splitting*» lève la dégénérescence sur l'index azimuthal m et permet de déduire la vitesse de rotation de l'étoile
- le taux de variation de la période (\dot{P}) renseigne sur la vitesse de contraction de l'étoile (liée au temps de contraction des couches extérieures de l'étoile déterminé à partir des modes piégés), sur le temps de refroidissement du noyau dégénéré (à partir des modes non piégés dans l'enveloppe externe de l'étoile) et permet de mieux contraindre les modèles, notamment ceux des progéniteurs des étoiles observées en offrant une calibration du temps caractéristique d'évolution.

Concernant les ZZ Ceti, le premier aspect (temps de contraction de l'enveloppe d'hydrogène) est négligeable.

1.7 Traitement mathématique du problème des pulsations non-radiales

1.7.1 Linéarisation des équations fondamentales

Principe et objectifs de la linéarisation des équations des pulsations stellaires

Les équations fondamentales que nous avons explicitées au début de ce Chapitre forment un système d'équations différentielles non-linéaires dont les solutions exactes ne peuvent généralement être connues que dans des cas de figure sans intérêt et, de toute façon, irréalistes.

Si, néanmoins, une solution *particulière* (que nous appellerons solution «non perturbée» ou solution «à l'équilibre», un système à l'équilibre étant considéré par ailleurs comme invariant dans le temps) de ce système est connue, il est alors possible de rechercher d'autres solutions, dites «perturbées», qui diffèrent de la solution à l'équilibre de façon infime.

Puisque ces deux solutions ne se différencient l'une de l'autre que très légèrement, alors chaque variable physique intervenant dans la solution perturbée peut s'exprimer comme la somme de cette variable correspondant à la solution non perturbée augmentée d'un petit terme correctif (dénommé petite variation ou petite perturbation). Pour obtenir une équation linéarisée, il faut tout d'abord écrire l'équation pour l'état d'équilibre (par convention on note généralement avec un indice 0, par exemple P_0 pour la pression, les grandeurs physiques correspondant à cet état non perturbé) puis pour l'état perturbé (avec les variables écrites en fonction des variables à l'équilibre, par exemple : $P = P_0 + P'$ pour la pression). Sachant que les équations sont vérifiées à l'état d'équilibre et que les dérivées temporelles ($\partial/\partial t$) de cet état d'équilibre sont nulles, on peut opérer un jeu de substitution et de simplification dans les équations perturbées. Enfin, il suffit de négliger les perturbations d'ordre supérieur à 1 ainsi que d'éventuels produits de ces perturbations. On aboutit ainsi, après calculs, à un système d'équations différentielles linéaires dont les solutions traduisent le comportement des variations spatiales et temporelles des variables physiques, à condition que soient fournies des conditions limites.

Linéariser les équations des pulsations stellaires présente l'avantage de fournir un système d'équations *linéaires*, ce qui fait que l'on peut alors leur appliquer des procédures mathématiques pour estimer numériquement leurs solutions c'est-à-dire pour évaluer les variations des grandeurs physiques mises en jeu.

Expression des équations de conservation linéarisées

Avec la méthode énoncée ci-dessus, les équations de conservation de la masse, du moment et de l'énergie s'expriment respectivement sous forme linéarisée de la manière suivante :

1.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}) = 0$$

2.

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla P' + \rho_0 \nabla \psi' + \rho' \nabla \psi_0 = 0$$

(si l'on fait l'approximation de Cowling, le terme $\rho_0 \nabla \psi'$ disparaît)

3.

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial}{\partial t} (S' + \epsilon \nabla S_0) = \nabla F - \nabla F'$$

(avec $\mathbf{F}' = -K_0 \nabla T' - K' \nabla T_0$ et $K = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3$)

1.7.2 Problème des conditions limites

Comme nous l'avons évoqué, on ne peut pas effectuer de résolution numérique des équations linéarisées si l'on ne dispose pas de conditions aux limites de l'étoile, c'est-à-dire au centre (à $\mathbf{r}=0$) et à la surface (à $\mathbf{r}=R$).

1. A la surface de l'étoile

A la surface d'une étoile sphérique, on admet généralement que la pression devient évanescence : $P=0$ à $\mathbf{r}=R$. Cette assertion implique que la variation lagrangienne de pression s'annule également à la surface : $\delta P = 0$. Par contre, afin d'éviter des singularités de calcul, il faut admettre que $\delta P/P$ reste fini partout dans l'étoile et en particulier à sa surface.

Nous avons donc deux conditions limites pour la surface de l'étoile : $P=0$ et $\delta P = 0$ (avec $\delta P/P < \infty$)

2. Au centre de l'étoile

Les grandeurs g , $d\rho/dr$ et dP/dr sont toutes proportionnelles à \mathbf{r} au voisinage du centre d'une étoile sphérique (Cox, 1979 [29]) alors que ρ , P et Γ_1 s'approchent d'une valeur finie lorsque $\mathbf{r} \rightarrow 0$.

De ces considérations, il résulte que $\delta P \propto r^\ell$ et $\delta \rho \propto r^\ell$ au centre de l'étoile, ℓ étant le degré sphérique du mode considéré (Cox, 1979 [29]).

Nous obtenons alors deux conditions limites pour le centre de l'étoile.

Nous disposons ainsi au total de quatre conditions limites (deux au centre et deux à la surface) qui sont nécessaires et suffisantes pour entreprendre la résolution numérique du système d'équations différentielles linéarisées.

1.7.3 La résolution du système d'équations différentielles linéarisées comme un problème de valeurs propres

De la forme des équations des pulsations stellaires il ressort que la valeur absolue de l'amplitude de la pulsation ϵ est une grandeur arbitraire (car si ϵ est solution alors $A\epsilon$ l'est aussi, avec A grandeur réelle quelconque). La constante d'intégration qui reste peut s'utiliser pour satisfaire l'une des deux conditions limites que l'on impose au centre ou à la surface. L'unique paramètre libre restant est σ , fréquence angulaire de pulsation. Sa valeur peut varier tant que la condition limite restante est satisfaite.

Ainsi, seules quelques fréquences propres σ_0, σ_1, etc (et leurs fonctions propres correspondantes $\epsilon_0, \epsilon_1, etc$) satisfont les conditions limites à la surface et au centre et donc peuvent éventuellement exister. Déterminer les fréquences de pulsation σ_k revient donc à résoudre un problème de valeurs propres.

1.7.4 Choix de la version de la théorie de la longueur de mélange pour le calcul des pulsations

Nous discutons ici le choix de la version de la théorie de la longueur de mélange la mieux adaptée pour modéliser une étoile ZZ Ceti.

Rappels sur les différentes versions de la théorie de la longueur de mélange (MLT)

Il existe trois versions de la théorie de la longueur de mélange, qui visent à rendre compte numériquement de l'efficacité de la convection au niveau de l'enveloppe des naines blanches : la

ML 1 (Böhm-Vitense, 1958 [6]), la ML 2 (Böhm & Cassinelli, 1971 [7]) et la ML 3 (de Loore, 1970 [31]). Les différences quantitatives entre ces 3 versions de la théorie de la longueur de mélange viennent des constantes numériques a , b et c qui interviennent dans les équations de la vitesse moyenne d'un élément convectif, du flux convectif moyen et de l'efficacité de la convection (dans un milieu sans source d'énergie) (Cox et Giuli, 1968 [28]) :

$$v^2 = \frac{a \ell^2 g Q (\nabla - \nabla')}{H_p}, \quad F_c = \frac{b \rho v C_p T \ell (\nabla - \nabla')}{H_p}, \quad \Gamma = \frac{\nabla - \nabla'}{\nabla' - \nabla_{ad}} = \frac{C_p \rho^2 \ell v \kappa}{c \sigma T^3}.$$

- la version 1 (ML1) implique : $a = 1/8$, $b = 1/2$ et $c = 24$
- la version 2 (ML2) : $a = 1$, $b = 2$ et $c = 16$
- la version 3 (ML3) : coefficients identiques à ceux de la version 2 mais avec une efficacité convective accrue : $\alpha = \frac{\ell}{H_p} = 2$ ($\alpha = 1$ pour les versions ML1 et ML2), $H_p = P/\rho g$ est l'échelle de hauteur de pression.

Influence du choix de l'efficacité convective sur la détermination des paramètres stellaires des étoiles DA variables

Dans la mesure où les étoiles DAV se situent dans un domaine de T_{eff} où la convection joue un rôle essentiel dans l'enveloppe stellaire, le comportement des modes de pulsation dans ces étoiles variables doit dépendre significativement de l'efficacité de la convection, c'est-à-dire de la version de la théorie de la longueur de mélange.

Bergeron et al. (1991) [2] ont mené des études comparatives afin de déterminer l'impact du paramétrage de la MLT sur différents paramètres stellaires. Leur analyse a révélé que les flux absolus, les indices de couleur et les largeurs de raies équivalentes sont très sensibles à l'efficacité convective dans le domaine de T_{eff} compris entre 8 et 15 kK, avec une sensibilité maximale autour de 13 kK.

Les effets de la convection se manifestent de plusieurs manières :

- dans les analyses photométriques, le choix d'une convection plus efficace conduit à une gravité de surface plus faible
- augmenter l'efficacité convective entraîne des flux émergents plus importants dans l'optique et donc, pour une V-magnitude donnée, à une estimation du rayon plus petite (soit une masse et une gravité de surface plus élevées)
- augmenter l'efficacité convective peut affecter la détermination de la masse totale de l'étoile jusqu'à hauteur de 11 % (passage de la ML1 à la ML3).

Par conséquent, le choix de la version de la MLT conditionne grandement la valeur des paramètres stellaires de l'étoile et doit être considéré avec soin.

Détermination de la MLT la mieux adaptée

Bergeron et al. (1995) [4] ont cherché à paramétriser la valeur de α en appliquant à leurs modèles de DAV chacune des versions de la MLT. Ils ont démontré que c'est la version ML2 de la théorie de la longueur de mélange, affectée d'un coefficient $\alpha=0.6$, qui permet la meilleure

adéquation entre les modèles et les données observationnelles dans les domaines suivants : $\log g$, masse de l'étoile, indices de couleur, T_{eff} optique et UV, *etc.*

Ce sont donc les paramètres a , b et c de la ML2 et le rapport $\alpha=0.6$ que nous avons retenus pour nos modélisations d'étoiles ZZ Ceti.

Chapitre 2

Energie cinétique des modes de pulsation

2.1 Considérations théoriques générales

2.1.1 Intérêt du calcul de l'énergie cinétique

Comme nous l'avons précisé dans le Chapitre 1, l'énergie cinétique des modes de pulsation d'une étoile ZZ Ceti est un élément utile pour identifier les modes piégés ainsi que les modes confinés, respectivement au-dessus et en-deçà d'une zone de discontinuité chimique. En particulier, Brassard et al. (1992) [14] ont démontré, par l'étude de l'énergie cinétique des modes de pulsation (de degrés sphériques $\ell=1$, $\ell=2$ et $\ell=3$) calculés pour des modèles d'étoiles DAV aux paramètres structuraux très variés, que celle-ci constitue un très bon indicateur du phénomène de piégeage des modes. Pour comprendre comment l'énergie cinétique ($E_c = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_V |\delta r|^2 \rho dV$) révèle le piégeage/confinement des modes de pulsation par rapport à une zone de discontinuité chimique, il suffit de réaliser que les modes piégés, principalement dans l'enveloppe d'**H** de l'étoile, doivent présenter des amplitudes systématiquement plus faibles que celles des autres modes en-deçà de cette discontinuité. Il en découle que la contribution à l'intégrale définissant l'énergie cinétique des modes est plus faible dans la portion de l'étoile située sous la discontinuité chimique pour les modes piégés que pour les autres modes.

Par conséquent, *les modes piégés au-dessus de la zone de discontinuité chimique ont une énergie cinétique (normalisée) inférieure à celle des modes ordinaires*. De la même façon et en suivant un raisonnement analogue, on peut affirmer que *les modes confinés sous cette discontinuité doivent posséder une énergie cinétique (normalisée) supérieure à celle des modes "normaux"*.

Ainsi, dans un diagramme représentant l'énergie cinétique (en ordonnée) en fonction de la période des modes (en abscisse), un mode piégé (dans l'enveloppe de l'étoile) se traduit par un minimum local dans le graphe alors qu'un mode confiné (sous l'enveloppe de l'étoile) se caractérise par un maximum local.

Par exemple, en reprenant le modèle introduit au Chapitre 1 pour lequel $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $\log q(\text{H}) = -10$, $\log q(\text{He}) = -4$, $T_{\text{eff}} = 11430 \text{ K}$ et ses périodes calculées pour le degré sphérique $\ell = 2$, le diagramme $\log(E_c)$ vs. P présente des minima et maxima locaux, qui traduisent respectivement les modes piégés et confinés par rapport aux deux discontinuités de la composition chimique de l'étoile. En outre, d'après les valeurs numériques issues de la modélisation, il est possible de s'assurer que cette étoile présente réellement deux discontinuités dans le gradient de sa composition chimique.

La Fig. 2.1 est une représentation graphique du gradient de la composition chimique en fonction

de $\log Q$ (Q désigne la masse réduite de l'étoile).

Cette courbe met en évidence deux discontinuités. La première intervient à $\log Q = -10$ et elle correspond à la transition entre l'enveloppe d'**H** et la couche d'**He**. La seconde se manifeste à $\log Q = -4$ et traduit la transition entre la couche d'**He** et le coeur dégénéré : la base de la couche d'**He** rencontre le sommet du coeur carboné.

Il est aussi très important de noter les différences *quantitatives* qui existent entre les 2 pics de cette courbe : le pic correspondant à la discontinuité **He/C** est sensiblement moins prononcé que celui qui délimite la transition entre l'**H** et l'**He**. Ceci va avoir des répercussions très importantes sur l'efficacité du piégeage opéré par chacune des deux discontinuités chimiques, ce qui sera discuté par la suite.

Enfin, l'intensité de ces deux pics de discontinuité dépend également de la masse de l'étoile : plus l'étoile est massive et plus le profil du gradient de la composition chimique est piqué au niveau des 2 interfaces **H/He** et **He/C**.

Nous allons maintenant envisager le profil de l'énergie cinétique des modes de pulsation en fonction de leur période respective. Le graphe de la Fig. 2.2 (identique à la Fig. 1.3) indique que le mode correspondant à $P = 429$ s, pour lequel $\log(Ec) = 41.5$, est un mode piégé, de même que le mode de période $P = 775$ s, avec $\log(Ec) = 40.3$, ou encore celui de période $P = 1062$ s, avec $\log(Ec) = 40.3$ (voir Table 1-2).

De la même façon, le mode de période $P = 545$ s, d'énergie cinétique égale à $\log(Ec) = 42.9$, est un mode confiné (ainsi que celui de période $P = 921$ s et d'énergie cinétique $\log(Ec) = 41.4$).

Les profils de $\log(Ec)$ vs. P varient aussi de façon qualitative en fonction de nombreux paramètres. Ces variations peuvent être mises à profit pour déduire certaines caractéristiques structurales de l'étoile, grâce en particulier aux diagrammes $\log(Ec)$ vs. P et ΔP vs. P .

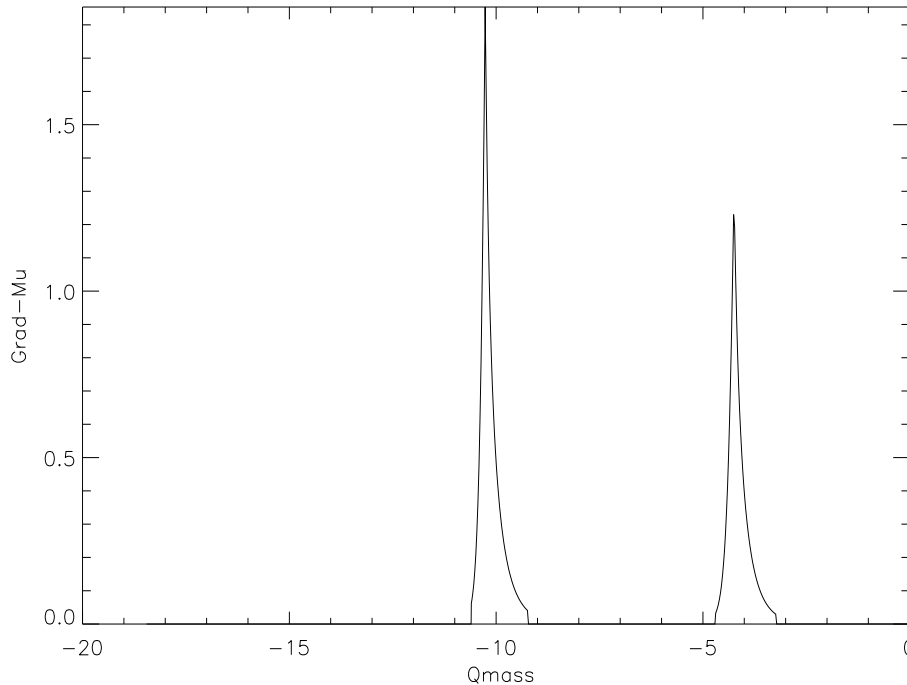


FIG. 2.1 – Gradient de la composition chimique en fonction de la masse réduite Q pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.55 M_{\odot}$, $T_{eff} = 11430$ K, $q(H) = 10^{-10}$ et $q(He) = 10^{-4}$

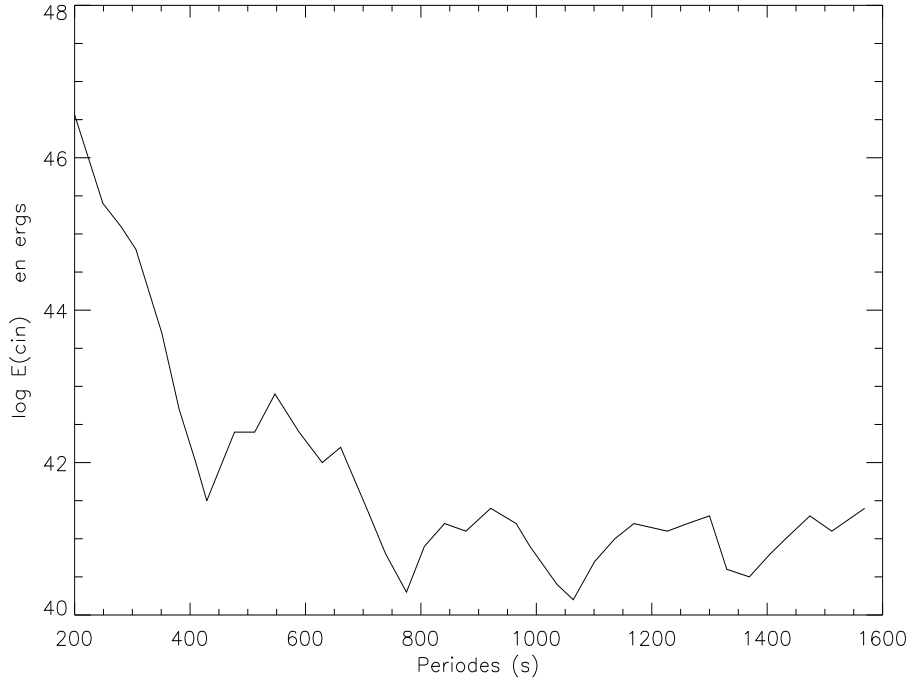


FIG. 2.2 – *Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.55 M_{\odot}$, $T_{eff} = 11430$ K, $q(H) = 10^{-10}$ et $q(He) = 10^{-4}$*

2.1.2 Influences respectives des 2 discontinuités chimiques sur le profil de l'énergie cinétique des modes

Dans une étoile *DAV*, les conditions de température et de pression induisent un triage gravitationnel très marqué des diverses espèces chimiques présentes dans l'étoile. Ces étoiles se composent d'un coeur de **C** dégénéré surmonté d'une couche d'**He**, elle-même recouverte d'une enveloppe d'**H**. Le fort gradient gravitationnel qui règne dans l'étoile provoque de fortes discontinuités dans sa composition chimique, au niveau des interfaces **H/He** et **He/C**. Il y a donc 2 discontinuités chimiques qui peuvent potentiellement induire le piégeage/confinement des modes et, par là même, influencer sur la valeur de leur énergie cinétique respective.

On peut en outre signaler que le profil du gradient de la composition chimique est à peu près le même pour les 2 discontinuités, qu'un gradient plus intense et plus "piqué" provoquera un piégeage/confinement des modes plus efficace, quantitativement plus fort (en particulier les minima/maxima locaux des courbes $\log(Ec)$ vs. P seront plus marqués).

Par ailleurs, la discontinuité **He/C** joue un rôle très secondaire par rapport à la discontinuité **H/He**. Cela est dû au fait que la fréquence de Brunt-Väisälä n'est pas sensible à un changement d'espèce chimique ionisée dans un milieu dégénéré lorsque les diverses espèces d'ions présentes dans le milieu conservent le même poids moléculaire moyen μ .

En effet, la contribution de la discontinuité de la composition chimique se manifeste dans le terme $\frac{d \ln \mu}{d \ln P}$ de l'expression de la fréquence de Brunt-Väisälä. Ici, l'hélium et le carbone dégénérés ont tous les deux un poids moléculaire moyen $\mu=2$.

De plus, dans le noyau dégénéré, la fréquence de Brunt-Väisälä décroît et tend à s'annuler (ce qui explique que les modes de gravité ne se propagent que dans les couches externes d'une naine blanche variable). Ainsi, la structure mécanique du coeur dégénéré d'une étoile naine blanche est

essentiellement régie par la pression de dégénérescence électronique (μ_e), qui est identique pour deux espèces de même poids moléculaire moyen. Enfin, la région de formation des modes au sein de l'étoile est généralement largement située au-dessus de la discontinuité chimique **He/C**, ce qui implique une amplitude très faible, voire négligeable, des modes de pulsation au niveau de cette interface, et par conséquent une faible interaction entre les modes et ce gradient de composition chimique. Il en résulte que :

- la discontinuité chimique **He/C** n'influence que très peu les caractéristiques des modes de pulsation, en particulier leur énergie cinétique. Par conséquent, l'épaisseur de la couche d'**He** (et donc la quantité d'**He** présente dans une ZZ Ceti) est très difficile à évaluer au moyen de l'astérosismologie
- la discontinuité **H/He** est, en pratique, la seule qui perturbe significativement le profil des modes de pulsation des modèles ainsi que la valeur de leur énergie cinétique. L'astérosismologie donne ainsi des indications sur la profondeur de cette discontinuité et donc renseigne sur la fraction de masse d'**H** de l'étoile.

Brassard et al. (1992) [14] ont étudié les modèles de Tassoul et al. (1990) [80]. Cette investigation a permis de déduire le comportement *qualitatif* des spectres de pulsation, ainsi que de l'énergie cinétique des modes, tout spécialement lorsque $q(H)$ et $q(He)$ varient. Brassard et al. (1992) [14] mettent clairement en évidence le rôle très secondaire joué par la fraction de masse d'**He**, dont l'influence sur l'énergie cinétique des modes est très restreinte. En revanche, la variation de $q(H)$ modifie considérablement les profils de pulsation ainsi que les visualisations de l'énergie cinétique. Cette étude a montré en particulier qu'une élévation de $q(H)$ provoque :

- une diminution de la période d'un mode piégé (de degré ℓ et d'ordre k donnés)
- une diminution du *trapping cycle* ainsi qu'une diminution du *period spacing* moyen entre modes adjacents.

Enfin, le contraste, en terme d'énergie cinétique, entre modes piégés et confinés s'accroît lorsque $q(H)$ diminue, ce qui est cohérent avec le fait que, lorsque l'enveloppe d'hydrogène se réduit, l'intégrale relative à l'énergie cinétique s'opère sur une portion de l'étoile respectivement plus courte (pour un mode piégé)/longue (pour un mode confiné).

Ces tendances générales sont illustrées par la Fig. 2.3. Sur cette figure, nous avons reporté avec un décalage des ordonnées de +9, +6 et +3 respectivement pour les 3 premières courbes, $\log E_c$ en fonction de la période P des modes calculés pour des modèles qui ne se différencient que par leur fraction de masse d'hydrogène. Ces modèles ont tous une masse totale $M_\star = 0.55 M_\odot$, une T_{eff} de 11450 K et une couche d'**He** de masse $M(He) = 10^{-2} M_\star$. Du haut vers le bas, les courbes de la Fig. 2.3 correspondent au modèle à $\log q(H) = -4, -6, -8$ et -10 respectivement. Les modes ont été calculés pour le degré sphérique $\ell = 2$.

Une tendance qualitative se déduit des généralités qui précèdent : les étoiles *DAV* qui possèdent le moins d'**H** résiduel doivent présenter les modes piégés les plus marqués dans leur spectre de pulsation car la masse de l'enveloppe d'**H** opère un effet de sélection très efficace. Cependant, cette généralisation a ses limites. Si $\log q(H) < -10$, l'interface **H/He** se situe au-dessus de la région de formation des modes, ce qui provoque une diminution de l'efficacité du piégeage. De la même façon, si $\log q(H) > -4$, les 2 interfaces se retrouvent sous la région principale de formation des modes, avec un piégeage des modes à nouveau moins efficace. Nous pouvons signaler enfin que

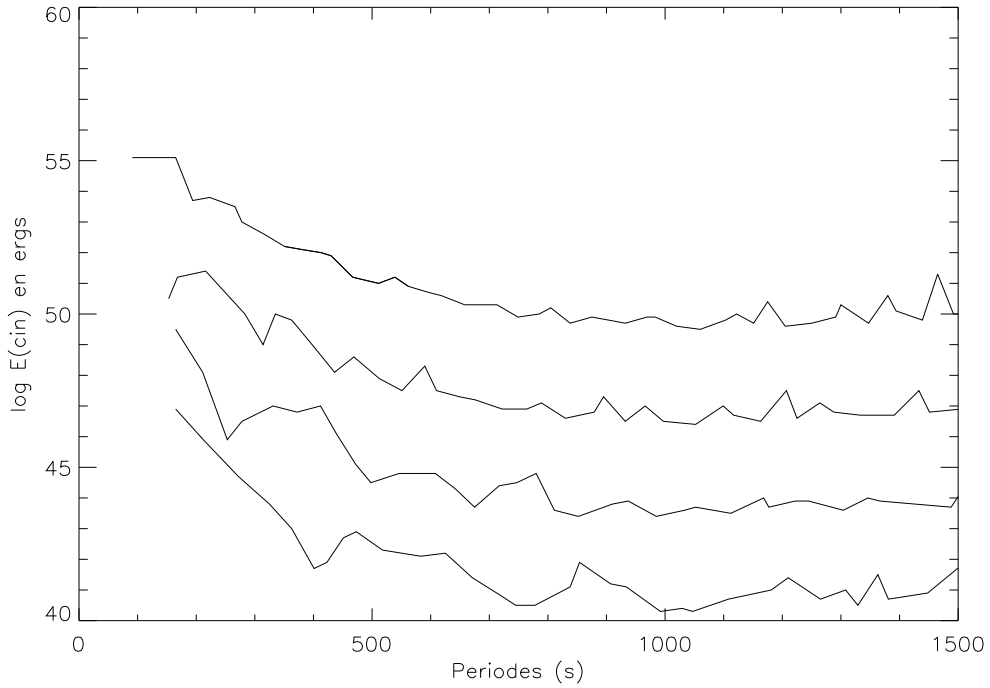


FIG. 2.3 – *Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour des modèles ayant $M_{\star} = 0.55 M_{\odot}$, $T_{eff} = 11450 K$, $q(He) = 10^{-2}$ et $q(H) = 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}$ respectivement de haut en bas*

deux valeurs de $q(H)$ et $q(He)$ faibles et voisines (par exemple $\log q(H) = -10$ et $\log q(He) = -8$) amplifient le confinement des modes et accentuent par conséquent les maxima locaux des courbes de l'énergie cinétique.

2.1.3 Effets des autres paramètres sur le profil des courbes de l'énergie cinétique

D'autres paramètres, différents de la fraction de masse d'hydrogène ou d'hélium de l'étoile, peuvent influencer les minima et maxima observés dans les graphes de l'énergie cinétique. Cependant, même si leur action n'est pas absolument négligeable, ils sont tous d'une importance secondaire.

1. l'efficacité convective :

L'efficacité de la convection (traduite dans le cadre d'une modélisation par le paramétrage de la MLT) n'influence que peu le comportement des modes de pulsation car les couches de l'étoile où la convection de l'**H** se produit contribuent généralement peu à la formation des modes. Toutefois, en fonction de sa propre position dans l'étoile, un mode piégé est plus ou moins sensible à la profondeur de la base de la zone convective ; l'efficacité de la convection peut donc avoir une influence sur la valeur de l'énergie cinétique de certains modes de pulsation.

2. la masse totale de l'étoile :

Le terme **B** de la fréquence de Brunt-Väisälä a un comportement universel lorsqu'il se

déplace le long de l'axe $\log Q$, ce qui rend les modes (et l'expression de leur énergie cinétique) assez peu sensibles à la masse totale M_\star de l'étoile. Pour des modèles massifs ($M_\star \approx 0.7 \sim 0.8 M_\odot$) toutefois, la gravité dans l'étoile est plus intense et le profil de la discontinuité chimique **H/He** plus piqué au niveau de l'interface ; ce profil plus aigu a pour effet d'accentuer le contraste entre modes piégés et confinés. Par conséquent, plus une étoile est massive, plus les minima et maxima locaux de la représentation graphique de $\log(Ec)$ vs. P ont tendance à être contrastés sur le graphe.

3. la température effective :

Lorsque la T_{eff} diminue (donc lorsque l'étoile vieillit et évolue sur sa séquence de refroidissement), la profondeur de la zone convective augmente. Par conséquent une diminution de la T_{eff} a le même effet sur les modes de pulsation (et sur la valeur de leur énergie cinétique) qu'une augmentation de l'efficacité de la convection.

2.1.4 Composantes radiale y_1 et tangentielle y_2 de la fonction propre des modes. Régions de formation des modes de pulsation

Pour bien comprendre la relation qui existe entre l'énergie cinétique d'un mode et sa région de formation au sein de l'étoile, on peut considérer l'amplitude des composantes radiale (y_1) et tangentielle (y_2) de sa fonction propre, et s'assurer que, dans le cas d'un mode piégé, ces amplitudes sont systématiquement plus faibles en-deçà de la zone de transition chimique **H/He**.

Il est également possible de comparer l'amplitude des fonctions propres d'un mode piégé avec celle des fonctions propres d'un mode normal. Si, selon les conventions généralement adoptées, on définit la région de formation des modes de pulsation comme la portion de l'étoile dans laquelle l'amplitude normalisée des fonctions propres est élevée (soit supérieure à 0.1), la représentation graphique de y_1 et de y_2 en fonction du rayon ou de la masse réduite de l'étoile permet de vérifier quelle portion de l'étoile est réellement sondée par les modes piégés.

Nous modélisons une ZZ Ceti de masse totale $M_\star = 0.55 M_\odot$, de $T_{eff} = 11400$ K, et de composition chimique telle que $q(H) = 5.10^{-8}$ et $q(He) = 2.10^{-5}$ pour illustrer cette propriété. La Fig. 2.4 traduit l'énergie cinétique des modes de degré sphérique $\ell = 1$ calculés pour cette étoile en fonction de leur période respective.

Cette visualisation souligne que le mode d'ordre $k = 4$ et de période $P = 386$ s est un mode piégé. De même le mode d'ordre $k = 6$ et de période $P = 515$ s est un mode confiné.

Enfin, on peut choisir le mode d'ordre $k = 8$ et de période $P = 605$ s comme mode normal.

Les Fig. 2.5 à Fig. 2.7 représentent respectivement la variation de y_1 en fonction de Q pour les modes $k=4$ (piégé), $k=8$ (normal) et $k=6$ (confiné). De même, les Fig. 2.8 à Fig. 2.10 traduisent la variation de y_2 en fonction de Q respectivement pour ces mêmes modes.

Ces courbes confirment notamment que les amplitudes des composantes radiale et tangentielle de la fonction propre d'un mode confiné sont systématiquement supérieures, sous la zone de transition, à celles d'un mode normal, ce qui implique nécessairement une énergie cinétique intégrée sur tout le rayon de l'étoile plus élevée pour les modes confinés.

Il apparaît aussi que la différence entre les régions de formation des modes confinés et des modes normaux est bien moins importante qu'entre les régions de formation des modes piégés et normaux. Cela s'explique par le fait que les modes sont plus efficacement piégés que confinés dans des modèles de naines blanches stratifiées chimiquement.

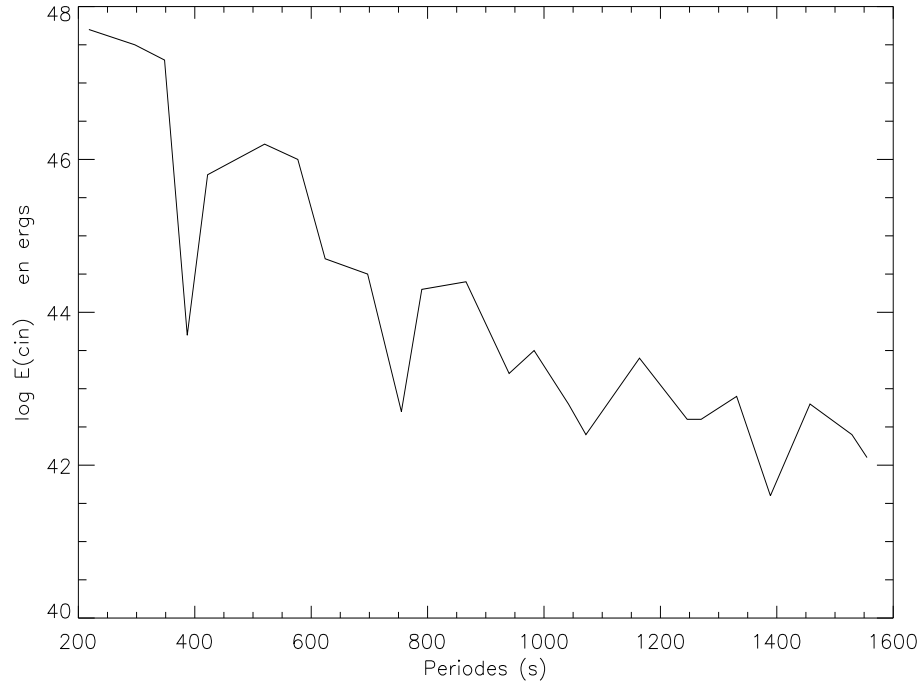


FIG. 2.4 – *Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_{\star}=0.55 M_{\odot}$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$ et $q(He)=2 \times 10^{-5}$*

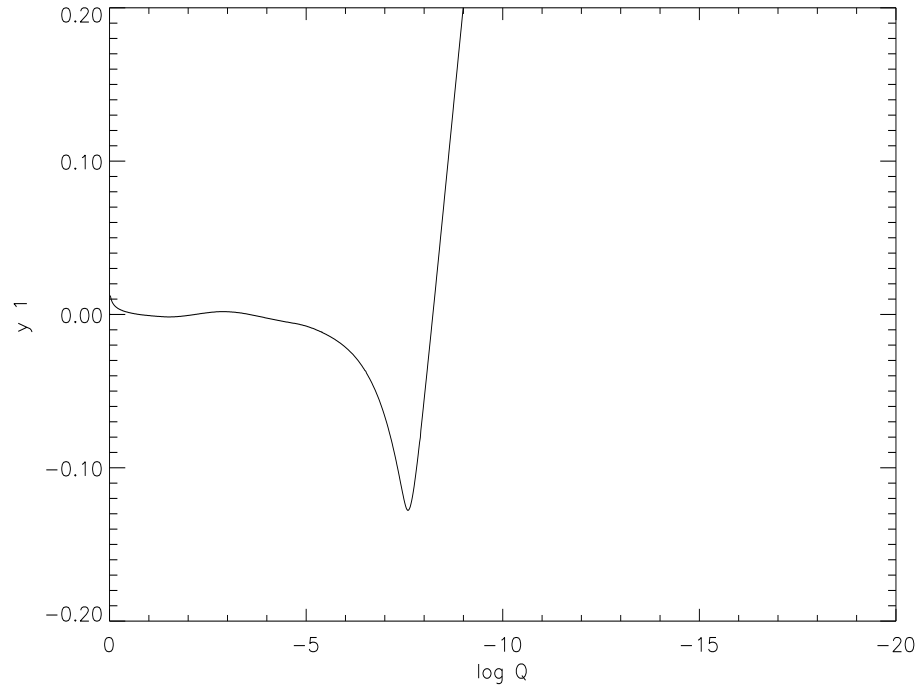


FIG. 2.5 – *Composante radiale (y_1) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=4$ (piégé) pour un modèle de masse $M_{\star}=0.55 M_{\odot}$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$*

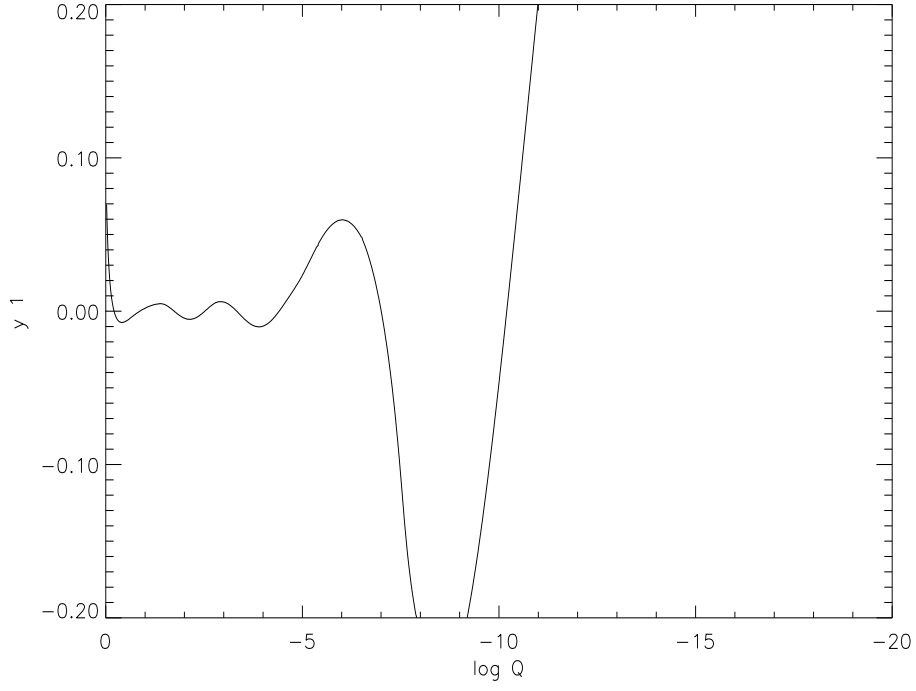


FIG. 2.6 – Composante radiale (y_1) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=8$ (normal) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$

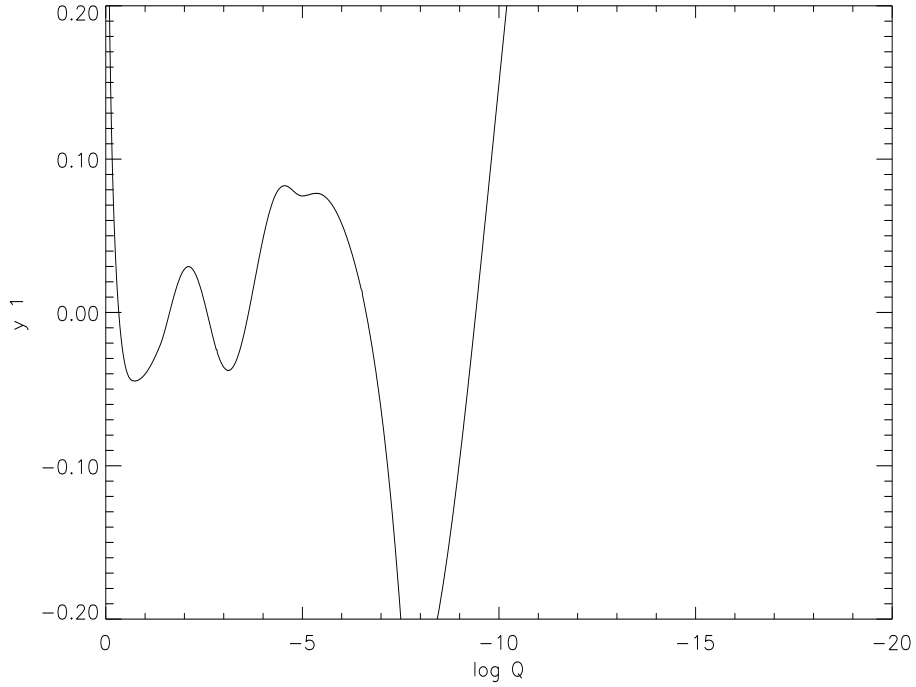


FIG. 2.7 – Composante radiale (y_1) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=6$ (confiné) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$

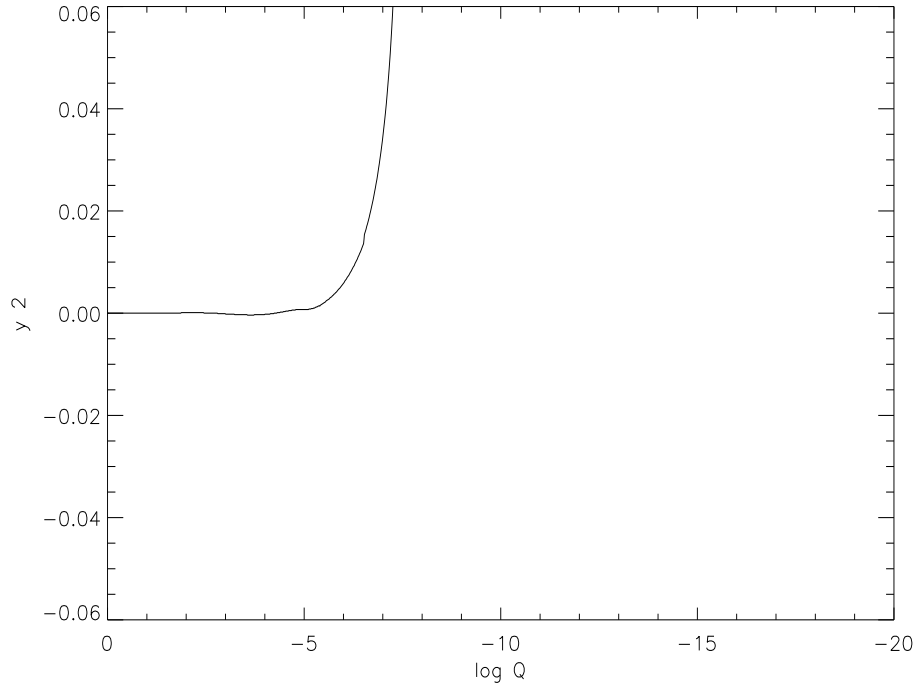


FIG. 2.8 – Composante tangentielle (y_2) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=4$ (piégé) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$

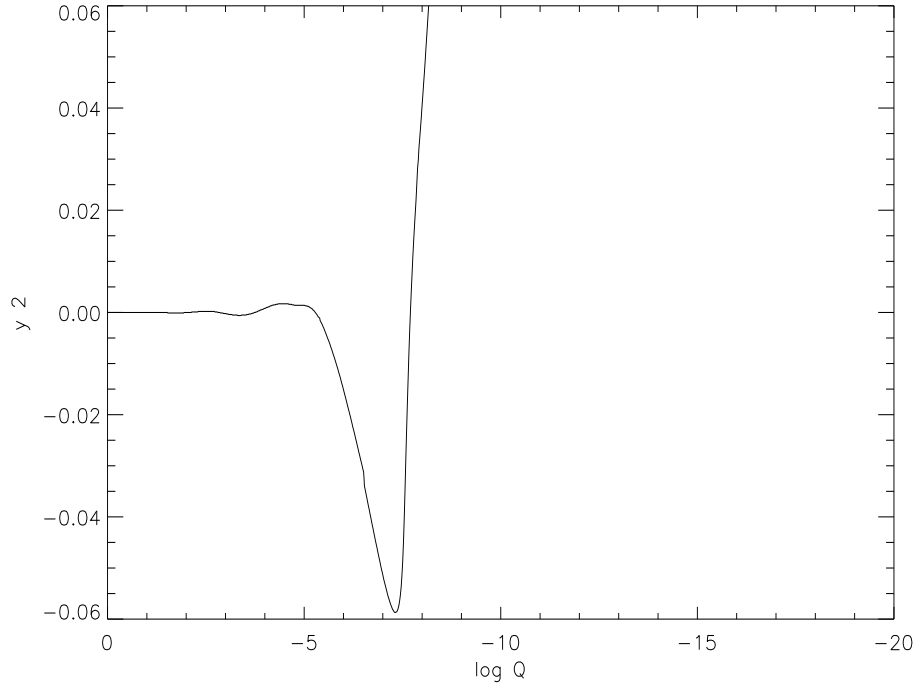


FIG. 2.9 – Composante tangentielle (y_2) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=8$ (normal) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$

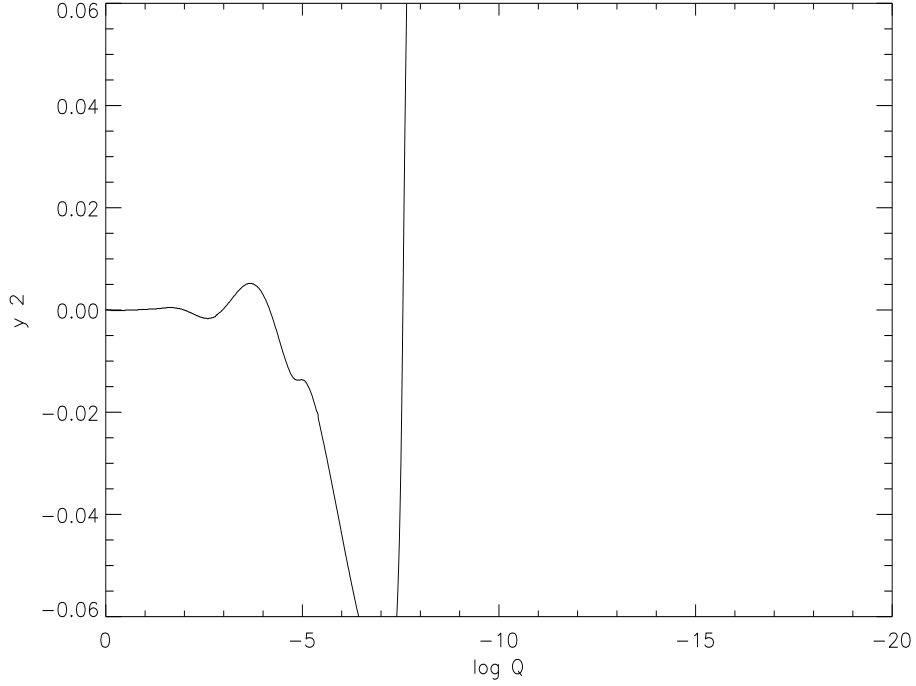


FIG. 2.10 – Composante tangentielle (y_2) de la fonction propre du mode $k=6$ (confiné) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$

2.2 Elaboration du programme de calcul de l'énergie cinétique des modes de pulsation

2.2.1 Introduction

Nous venons de montrer dans quelle mesure le calcul de l'énergie cinétique des modes de pulsation d'une étoile ZZ Ceti peut constituer un outil efficace pour la détermination des paramètres stellaires.

Le code présent au LAT n'était jusqu'alors pas doté d'une telle faculté de calcul. Nous avons ainsi élaboré un programme corrolaire rendant possible ce calcul.

Les données, déjà exposées et à venir, qui se rapportent à l'énergie cinétique des modes de pulsation sont calculées pour nos modèles à l'aide de cette nouvelle fonctionnalité. Ce programme a besoin de plusieurs types de données distinctes pour s'exécuter.

Partant de la formule théorique de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_V |\delta r|^2 \rho dV$, on demande au programme, pour chaque mode de période σ , d'intégrer numériquement chacune des grandeurs (ou grandeurs différentielles) données intervenant dans la formule sur toutes les couches élémentaires qui constituent le modèle. Le programme principal, qui effectue le calcul adiabatique des modes de pulsation (pour une valeur du degré sphérique ℓ donnée), délivre pour chaque couche du modèle et pour chaque période de pulsation, les valeurs de y_1 et y_2 qui sont rattachées aux variables de Dziembowski de la façon suivante :

1. $a(r) = r.y_1$
2. $b(r) = g.y_2/\sigma^2$ avec $g = G.m(r)/r^2$

Le déplacement élémentaire, intervenant dans l'expression de l'énergie cinétique, est lui-même fonction de $a(r)$ et de $b(r)$: $|\delta r|^2 = a^2(r) + b^2(r)$.

Après intégration sur toutes les couches du modèle, le programme écrit la valeur de l'énergie

cinétique de chacun des modes de pulsation dans un fichier indépendant, où cette valeur peut être ensuite relue et exploitée, éventuellement de façon graphique.

Il est à noter par ailleurs que les composantes radiale (y_1) et tangentielle (y_2) des fonctions propres des modes de pulsation sont solutions des deux équations différentielles suivantes :

$$r \frac{dy_1}{dr} = \left(\frac{gr}{c_s^2} - 3 \right) y_1 + \frac{gr}{c_s^2} \left(\frac{S_\ell^2}{\sigma^2} - 1 \right) y_2 \quad (2.1)$$

$$r \frac{dy_2}{dr} = -(N^2 - \sigma^2) \frac{r}{g} y_1 - \left[\frac{gr}{c_s^2} + \frac{d \ln(\rho g)}{d \ln r} + 1 \right] y_2 \quad (2.2)$$

2.2.2 Illustrations du calcul de l'énergie cinétique pour divers modèles aux paramètres stellaires variés

Afin de vérifier les propriétés énoncées précédemment et de mettre en évidence les variations *qualitatives* du profil de $\log(Ec)$ vs. P en fonction de paramètres structuraux comme la masse totale, M_\star , ou la fraction de masse d'hydrogène de l'étoile, $q(H)$, nous avons modélisé deux ZZ Ceti aux paramètres physiques contrastés.

Notre premier modèle représente une étoile dont la structure est favorable à un piégeage efficace des modes au-dessus de la discontinuité chimique **H/He**. Pour cette étoile nous avons en effet choisi : $M_\star = 0.66 M_\odot$, $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff} = 12572$ K.

Tout d'abord, la masse assez élevée du modèle doit accentuer le gradient gravitationnel dans l'étoile, ce qui aura pour effet de "piquer" sensiblement le profil de la discontinuité chimique au niveau de l'interface **H/He**. Ce premier élément favorise le piégeage/confinement des modes car la fréquence de Brunt-Väisälä est très sensible au profil de la zone de transition chimique entre l'**H** et l'**He**. D'autre part, la très faible teneur en hydrogène de ce modèle implique, à son tour, une sélection entre modes piégés et confinés très efficace. Enfin la T_{eff} (élevée pour une étoile DAV) place ce modèle sur le bord bleu de la bande d'instabilité des ZZ Ceti, ce qui réduit fortement l'épaisseur de la zone convective au niveau de la surface de l'étoile : la convection ne doit pas, ou à tout le moins très peu, perturber le comportement des modes de pulsation ni leur piégeage en particulier.

La Table 2-1 présente les modes de degré $\ell=1$ et leur énergie cinétique correspondante et la Table 2-2 ceux de degré $\ell=2$ avec leur énergie cinétique respective. Les périodes sont arrondies à la seconde près.

Table 2-1. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=1$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.66 M_\odot$ avec $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff}=12572$ K

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P (s)	261	333	421	490	550	633	699	776	842	869	919	1011	1084
ΔP (s)	—	72	88	69	60	83	66	77	66	27	50	92	73
$\log E_{cin}$	46.5	45.7	44.7	44.5	43.6	42.7	42.0	40.1	40.4	42.0	41.6	41.3	41.9

k	14	15	16	17	18	19
P (s)	1145	1233	1280	1368	1471	1508
ΔP (s)	61	88	47	88	103	37
$\log E_{cin}$	41.5	41.3	41.5	39.3	38.1	40.6

Table 2-2. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=2$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.66 M_\odot$ avec $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff}=12572$ K

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P (s)	152	194	245	289	322	369	408	451	489	509	534	586	632
ΔP (s)	--	42	51	44	33	47	39	43	38	20	25	52	46
$\log E_{cin}$	46.8	46.0	44.8	44.4	43.8	42.7	42.0	40.2	40.4	41.9	40.2	41.4	41.9

k	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
P (s)	665	717	748	791	852	880	903	942	975	1015	1080	1110	1153
ΔP (s)	33	52	31	43	61	28	23	39	33	40	65	30	43
$\log E_{cin}$	41.6	41.1	41.7	39.5	38.3	40.4	41.7	40.7	42.5	40.6	40.3	41.4	38.7

k	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
P (s)	1203	1226	1283	1329	1338	1372	1429	1449	1505	1553
ΔP (s)	50	23	57	46	9	34	57	20	56	48
$\log E_{cin}$	39.4	41.8	41.1	40.7	43.2	41.5	42.2	42.1	41.0	41.7

Ces courbes (Fig. 2.11 à Fig. 2.14) confirment les prédictions que la théorie nous a permis d'émettre. Par rapport au modèle moins massif (avec $M_\star = 0.55 M_\odot$, présenté en 2.1.1, pour lequel la fraction de masse d'**H** est plus élevée), les Fig. 2.11 à Fig. 2.14 montrent pour les modes de degré $\ell = 2$ que :

- le premier mode piégé a une période plus élevée
- le *trapping cycle* est plus grand
- le *period spacing* entre modes adjacents est lui aussi plus grand
- le contraste en terme d'énergie cinétique entre modes adjacents est beaucoup plus important que pour le premier modèle
- le contraste en terme d'énergie cinétique entre modes piégés et confinés est aussi sensiblement plus important que ce qui est observé pour le modèle de $M_\star = 0.55 M_\odot$.

Nous reportons les variations de l'énergie cinétique des modes en fonction des périodes réduites P_{rd} (Fig. 2.15), avec $P_{rd} = \sqrt{\ell(\ell+1)} \times P$. La courbe en pointillés de la Fig. 2.15 se rapporte aux modes de degré sphérique $\ell = 1$ et celle en traits pleins à ceux de degré sphérique $\ell = 2$.

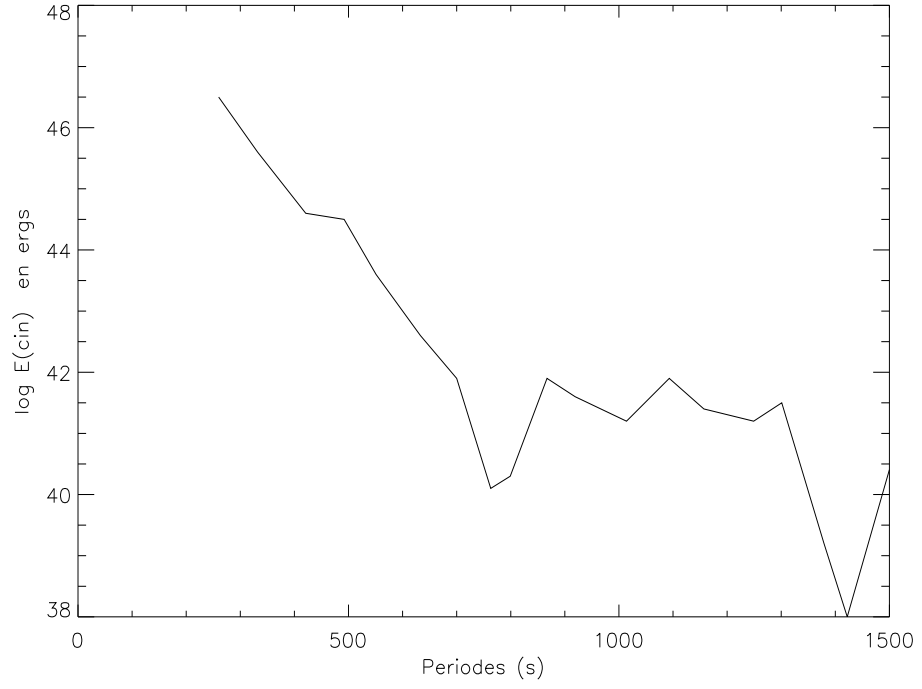


FIG. 2.11 – *Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.66 M_{\odot}$, $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff} = 12572 K$*

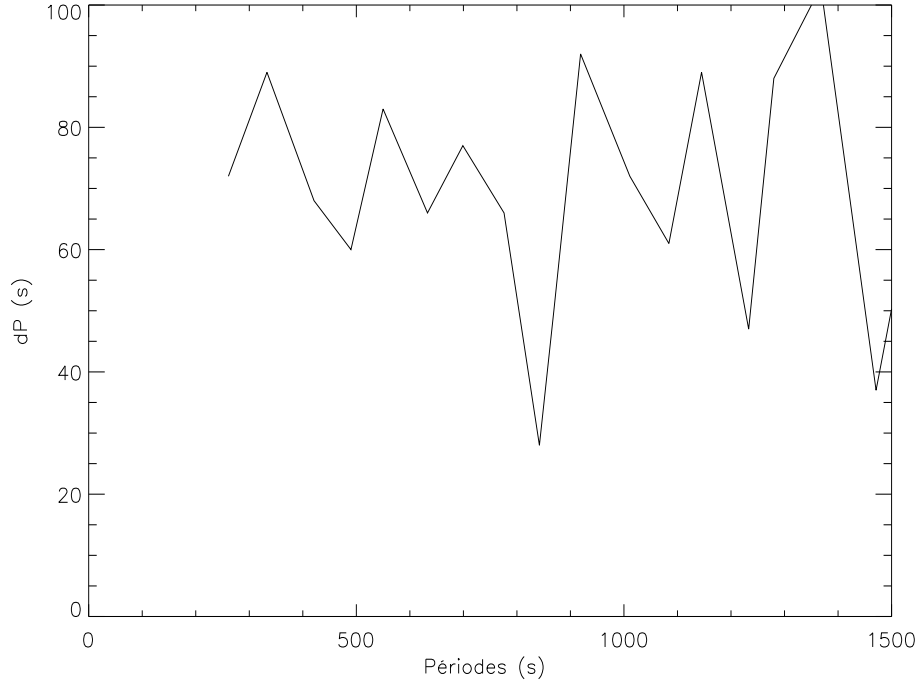


FIG. 2.12 – *Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.66 M_{\odot}$, $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff} = 12572 K$*

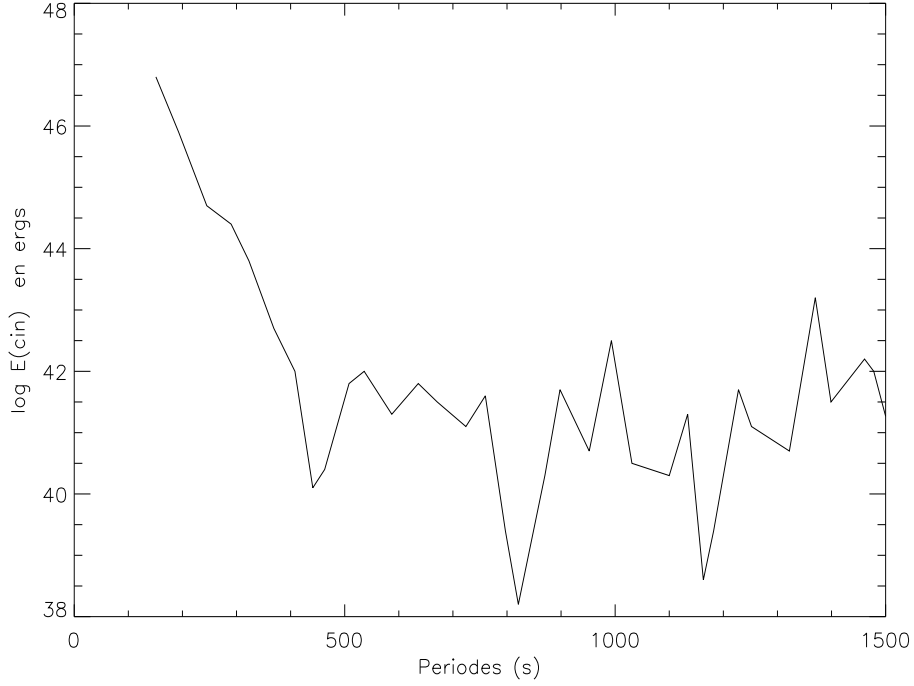


FIG. 2.13 – *Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.66 M_{\odot}$, $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff}=12572$ K*

Nous allons maintenant modéliser une étoile DAV dont les propriétés sont très différentes de celles du modèle antérieur. Les principaux paramètres de ce nouveau modèle sont les suivants : $M_{\star}=0.47 M_{\odot}$ avec $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K.

Ici, la faible masse M_{\star} et la forte fraction de masse $q(H)$ doivent contribuer à limiter le phénomène de piégeage des modes.

A l'inverse de modèles plus massifs, la masse de l'étoile (relativement faible) va réduire le gradient de la composition chimique. La représentation graphique de ce gradient (Fig. 2.16) fait apparaître deux pics modérément prononcés : l'un à $\log Q = -4$ et l'autre à $\log Q = -2.5$. Cela induit un piégeage des modes nécessairement plus modéré. Par voie de conséquence, les variations de N^2 autour de la discontinuité chimique **H/He** sont également moins brutales. On peut s'en assurer en examinant la représentation graphique de N^2 en fonction de Q pour ce modèle (Fig. 2.17).

La Fig. 2.17 permet de visualiser le pic principal (qui correspond au passage de l'**H** dans l'**He**) à $\log Q = -4$, en revanche le pic secondaire (qui traduit la transition chimique entre l'**He** et le **C**) à $\log Q = -2.5$ est indétectable à cette échelle.

La Table 2-3 fait référence aux modes calculés pour ce modèle pour le degré sphérique $\ell=1$, la Table 2-4 pour le degré sphérique $\ell=2$, les périodes étant arrondies à la seconde près.

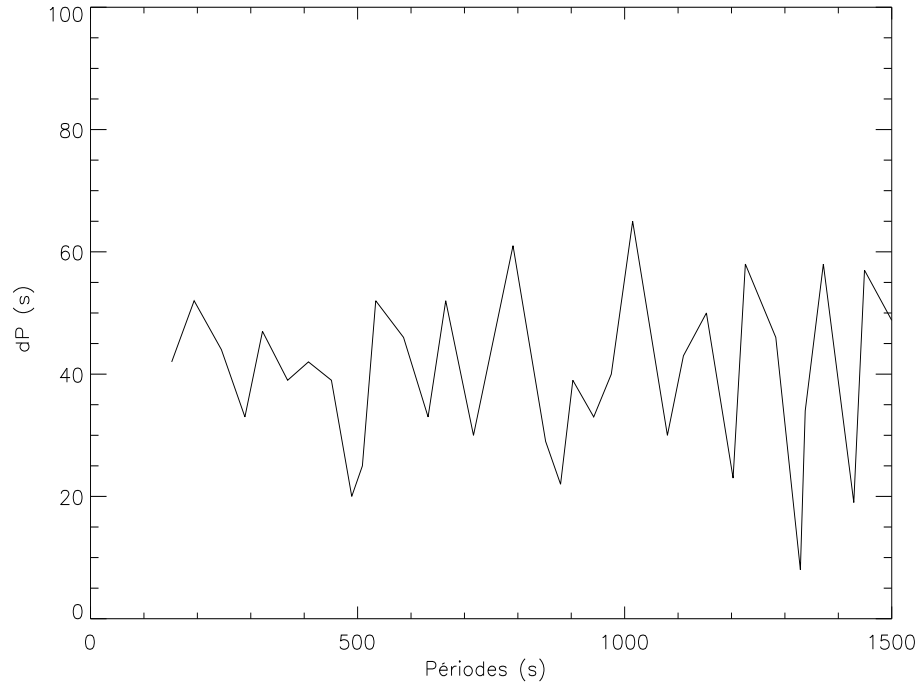


FIG. 2.14 – *Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.66 M_{\odot}$, $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff} = 12572$ K*

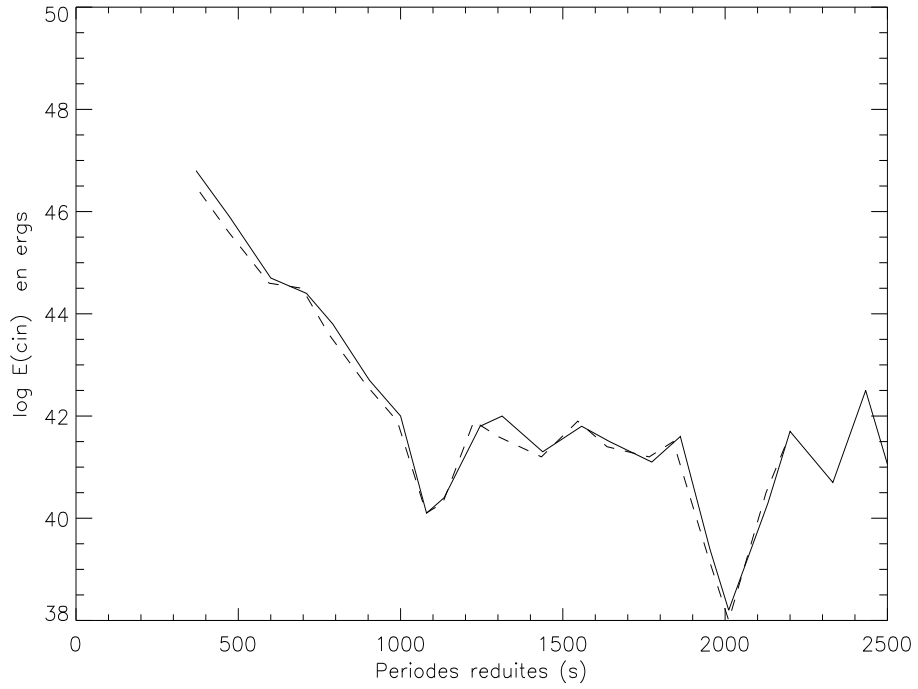


FIG. 2.15 – *Energie cinétique vs. Période réduite pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.66 M_{\odot}$, $T_{eff} = 12572$ K, $\log q(H) = -11.5$ et $\log q(He) = -3$; les traits pleins se rapportent aux modes de degré $\ell=2$, les pointillés aux modes de degré $\ell=1$*

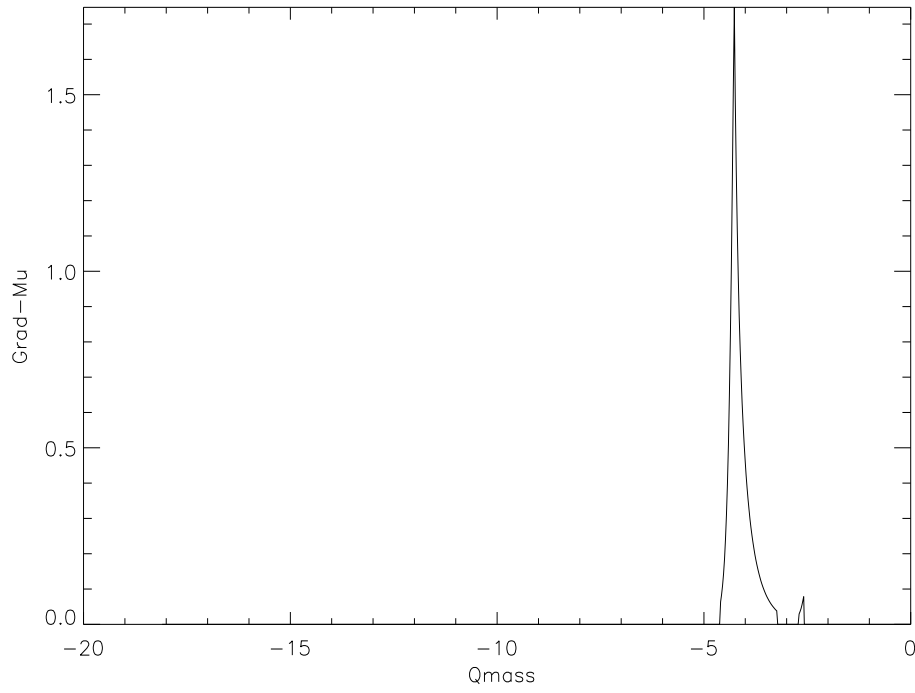


FIG. 2.16 – *Gradient de la composition chimique en fonction de la masse réduite pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff} = 10954$ K*

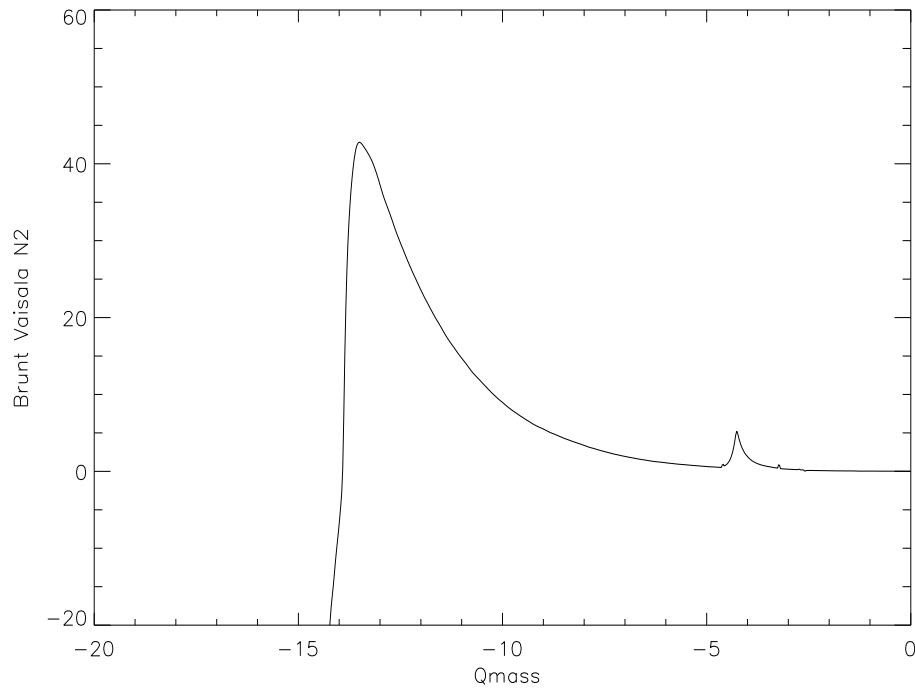


FIG. 2.17 – *Variation du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä en fonction de la masse réduite pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff} = 10954$ K*

Table 2-3. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=1$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.47 M_\odot$ avec $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P (s)	186	286	370	411	470	537	588	658	715	769	828	895	960
ΔP (s)	—	100	84	41	59	67	51	70	57	54	59	67	65
$\log E_{cin}$	46.4	47.2	45.5	45.0	45.4	44.3	44.1	43.9	43.5	43.5	43.1	42.9	42.7

k	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
P (s)	1016	1071	1134	1194	1256	1328	1366	1436	1506	1555
ΔP (s)	56	55	63	60	62	72	38	70	70	49
$\log E_{cin}$	42.7	42.3	42.3	42.1	41.9	42.0	41.9	41.6	41.7	41.6

Table 2-4. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=2$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.47 M_\odot$ avec $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P (s)	169	217	241	292	318	349	389	422	461	490	523	561	602
ΔP (s)	—	48	24	51	26	31	40	33	39	29	33	38	41
$\log E_{cin}$	45.9	46.7	45.0	44.5	44.6	43.8	43.8	43.3	43.0	42.9	42.8	42.5	42.2

k	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
P (s)	630	665	698	730	774	806	834	875	905	942	983	1008	1045
ΔP (s)	28	35	33	32	44	32	28	41	30	37	41	25	37
$\log E_{cin}$	42.2	42.1	42.0	41.9	41.7	41.5	41.3	41.7	41.3	41.2	41.3	41.1	41.2

k	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
P (s)	1080	1120	1153	1185	1221	1249	1292	1335	1355	1399	1431	1459
ΔP (s)	35	40	33	32	36	28	43	43	20	44	32	28
$\log E_{cin}$	41.4	41.1	41.2	41.3	41.2	41.4	41.2	41.2	41.4	41.7	41.4	41.8

k	39	40
P (s)	1510	1543
ΔP (s)	51	33
$\log E_{cin}$	41.6	41.4

Les Fig. 2.18 à Fig. 2.21 expriment les variations de l'énergie cinétique et du *period spacing* respectivement en fonction de la période des modes de degré sphérique $\ell=1$ puis $\ell=2$.

Nous représentons pour conclure (Fig. 2.22) les variations de l'énergie cinétique des modes en fonction de leur période réduite P_{rd} (avec $P_{rd} = \sqrt{\ell(\ell+1)} \times P$). Comme la théorie le suggère, la structure de ce modèle n'est pas favorable à un piégeage/confinement efficace des modes de pulsation. Les courbes traduisant $\log(Ec)$ vs. P ne font apparaître ni minimum ni maximum local significatif. Le profil des courbes de l'énergie cinétique, aussi bien pour le degré sphérique $\ell = 1$ que $\ell = 2$, est stable, sans creux ni pic apparent. En outre, la différence d'énergie cinétique entre 2 modes adjacents reste toujours très faible, à l'inverse de ce qui est observé pour le modèle

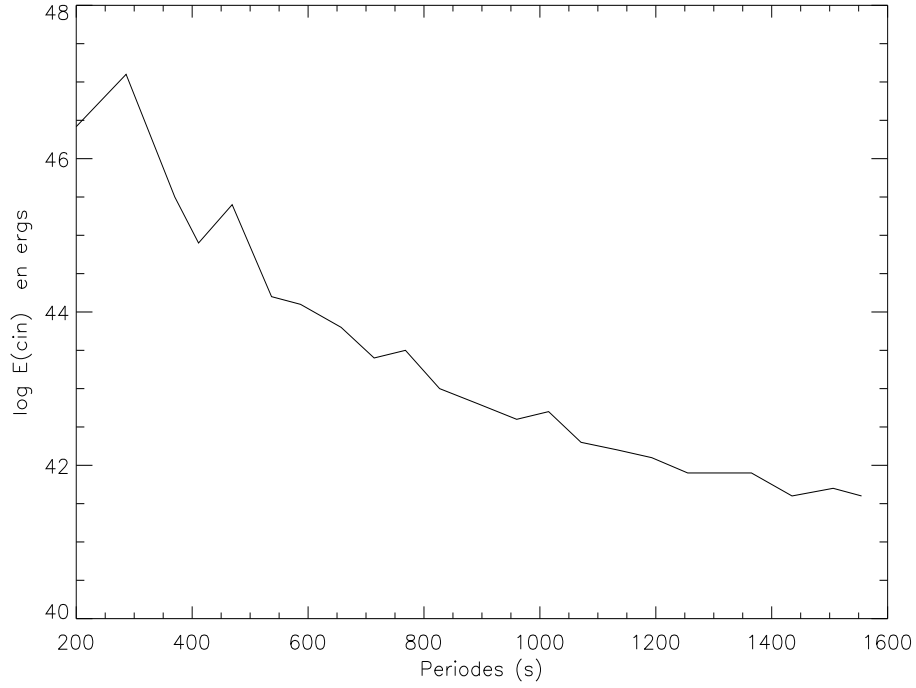


FIG. 2.18 – *Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff} = 10954 K$*

plus massif. De la même façon les variations du *period spacing* sont restreintes, centrées autour de $\Delta P = 55$ s pour les modes de degré $\ell = 1$ et $\Delta P = 35$ s pour ceux de degré $\ell = 2$. Là encore, il n'y a pas de minimum ou de maximum local visible. En se basant aussi bien sur l'énergie cinétique des modes que sur le *period spacing* qui les affecte, on peut considérer que ce modèle n'opère aucun piégeage/confinement significatif des modes de pulsation.

En conclusion, nous pouvons affirmer que les deux modélisations précédentes valident les prédictions qualitatives portant sur le profil de l'énergie cinétique et sur celui du period-spacing que la théorie permet de prévoir.

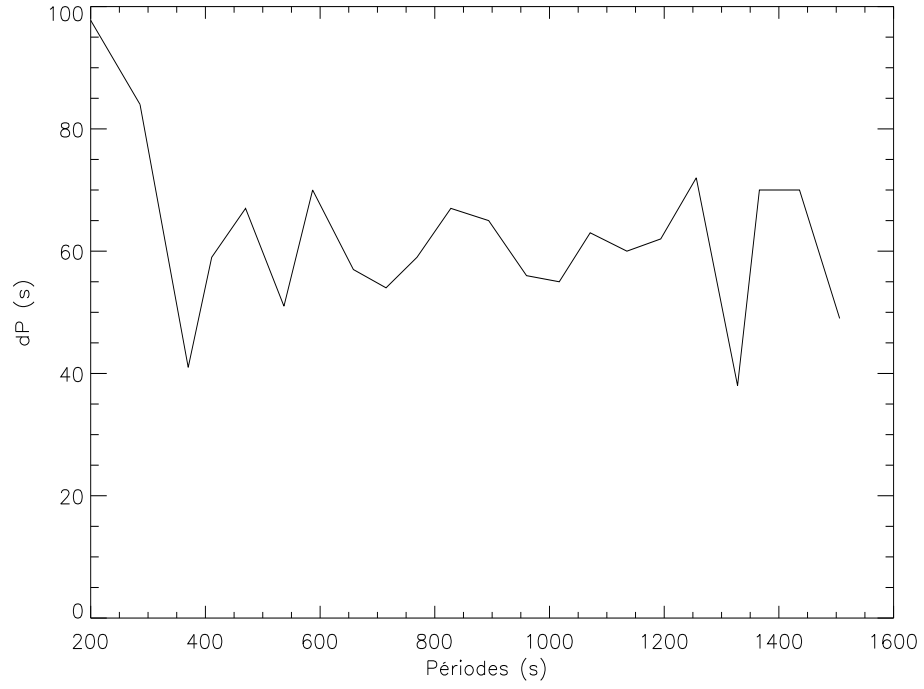


FIG. 2.19 – *Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K*

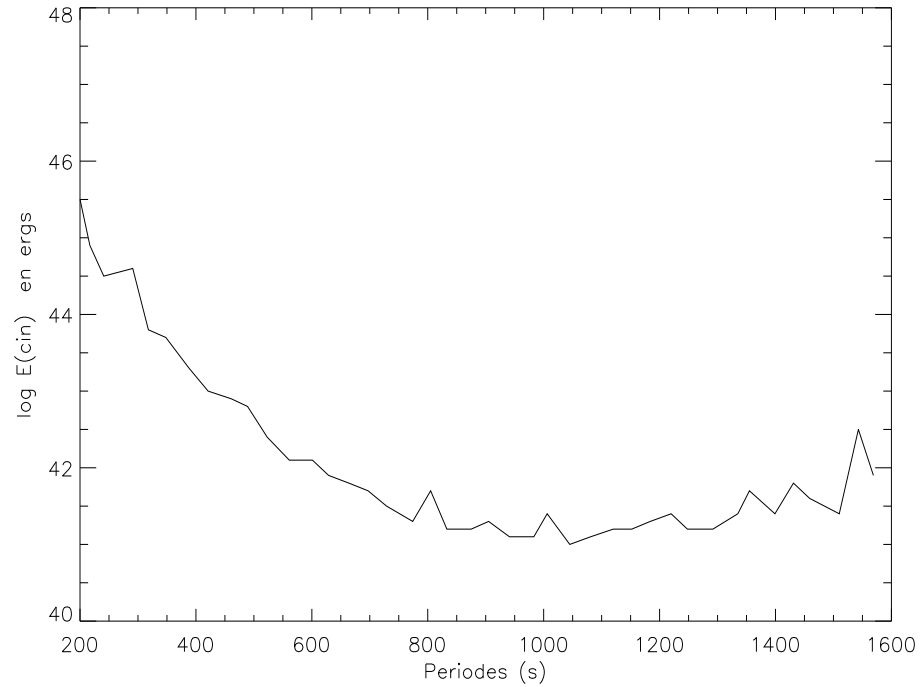


FIG. 2.20 – *Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K*

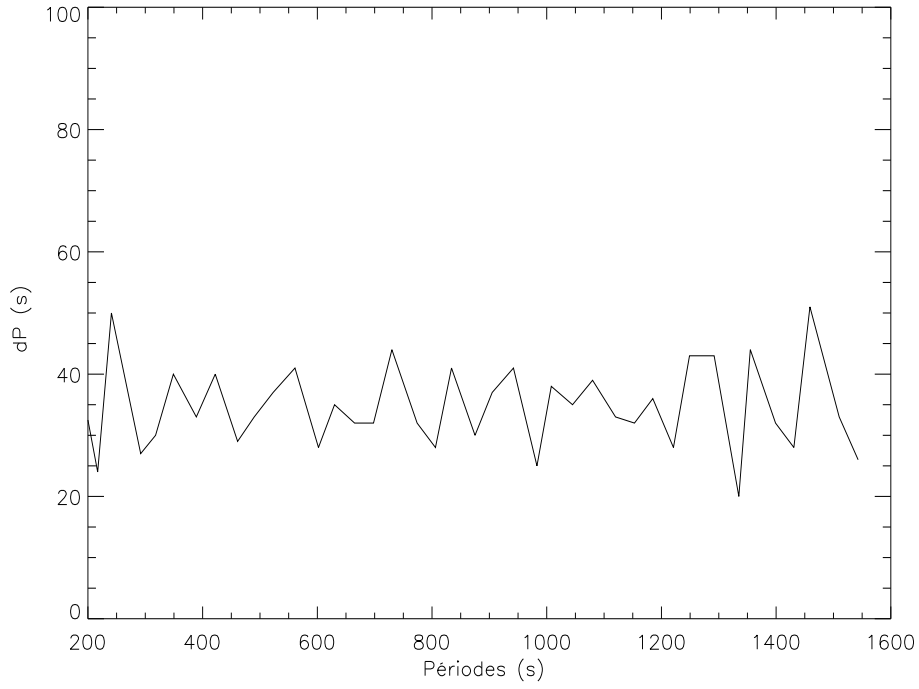


FIG. 2.21 – *Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff} = 10954 K$*

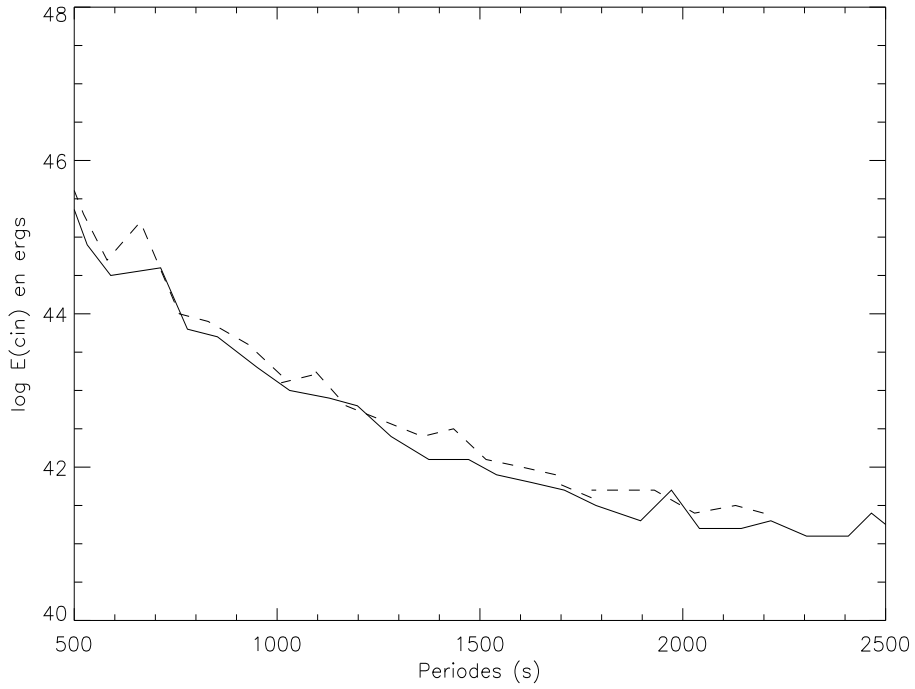


FIG. 2.22 – *Energie cinétique vs. Période réduite pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $T_{eff} = 10954 K$, $\log q(H) = -4$ et $\log q(He) = -2.5$, les traits pleins se rapportent au degré $\ell=2$ et les pointillés au degré $\ell=1$*

Chapitre 3

Etude de la ZZ Ceti *HL Tau 76*

3.1 Introduction

HL Tau 76 a été la toute première ZZ Ceti à être observée (Landolt, 1968) [62]. Elle a depuis été étudiée de façon récurrente, en particulier lors des campagnes WET multisites XCOV13 et XCOV18. On dispose ainsi d'une grande quantité de données observationnelles sur cette étoile DAV.

Bergeron et al. (1995 [4] & 2004 [5]) ont proposé une détermination spectroscopique de sa masse : $M_{\star} = 0.55 (\pm 0.03) M_{\odot}$ et de sa température effective : $T_{eff} = 11\,450 (\pm 200)$ K.

Le spectre de pulsation de HL Tau 76 est complexe car les modes observés se regroupent dans des bandes de fréquences très étroites : on y rencontre donc trop peu de modes d'ordres radiaux consécutifs pour pouvoir estimer observationnellement la valeur du *period spacing* ; ce qui empêche toute déduction directe de la structure interne de l'étoile.

Cette particularité du spectre constitue une motivation supplémentaire pour entreprendre la détermination des paramètres stellaires (masse totale, masse de l'enveloppe d'hydrogène, masse de la couche d'hélium et température effective) au moyen d'une modélisation de HL Tau 76 puis d'une comparaison des spectres observé et calculé pour le meilleur modèle retenu, pour les modes de pulsation de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$.

Dans un premier temps, nous avons élaboré un algorithme permettant, à partir des données d'observation, d'isoler le meilleur modèle susceptible de représenter au mieux HL Tau 76.

L'utilisation de cet algorithme nous a amenés à déterminer les paramètres stellaires les plus probables pour l'étoile. Nous avons ensuite calculé les modes adiabatiques de degrés $\ell=1$ puis $\ell=2$ pour ce meilleur représentant de la ZZ Ceti.

Enfin, en tenant compte de l'effet du *rotational splitting*, nous avons identifié les modes présents dans le spectre de l'étoile grâce aux modes calculés pour le modèle retenu puis nous avons discuté les résultats obtenus.

3.2 Données observationnelles

Toutes les données d'observation disponibles concernant HL Tau 76 sont présentées exhaustivement par Dolez et al. (2005) [33].

Nous retenons la liste des pulsations présentes dans le spectre de l'étoile, une fois les combinaisons linéaires des vrais modes retirées. Pour séparer les vrais modes des probables combinaisons linéaires du spectre de puissance de l'étoile, Dolez et al. (2005) [33] ont considéré la plupart des pics de faible amplitude comme combinaisons linéaires et/ou harmoniques des pics de grande

amplitude, induits par la forme non-sinusoidale de leurs courbes de lumière, lorsque se vérifiait la relation : $f_1 \pm f_2 = f_3$ où f_1 , f_2 et f_3 désignent 3 fréquences issues de la Transformée de Fourier. Des combinaisons de fréquences telles que $f_1 \pm f_2 = f_3$ sont caractéristiques du spectre de puissance des étoiles DAV froides. Toutefois aucune donnée *a priori* ne permet d'isoler la combinaison linéaire des deux modes parents impliqués dans cette combinaison de fréquences.

Dolez et al. (2005) [33] ont entre autres considéré les arguments suivants : la comparaison entre les diverses campagnes d'observation permet de détecter si des modes apparaissent sans leur combinaison linéaire associée ; l'amplitude de la combinaison linéaire doit en principe être plus faible que celle des modes parents qui lui ont donné naissance dans le spectre ; l'estimation du *period spacing* théorique déduit de l'observation permet de contrôler si certaines périodes possiblement impliquées dans une combinaison linéaire coïncident avec les valeurs théoriques prédites par le *period spacing*. Néanmoins, Dolez et al. (2005) [33] indiquent que la complexité du spectre de HL Tau 76 rend la détection des combinaisons linéaires difficile et parfois incertaine : la modélisation s'avère donc nécessaire pour réduire l'ambiguïté qui pèse sur la nature de certaines périodes.

La liste des périodes que Dolez et al. (2005) [33] retiennent comme vrais modes de pulsation est exposée dans la Table 3-1.

Dolez et al. (2005) [33] identifient 44 périodes qu'ils considèrent comme des modes de pulsation indépendants de degré $\ell=1$ ou $\ell=2$ soumis à l'action du *rotational splitting*.

Ces modes couvrent un large intervalle de périodes, allant de 380 s à 1390 s. Avec un spectre d'oscillation aussi riche, l'application des techniques astérosismologiques va permettre de contraindre très précisément la structure interne de HL Tau 76.

Nous tiendrons également compte de l'identification préliminaire du degré ℓ fournie par Dolez et al. (2005) [33], lorsque celle-ci est disponible, pour les différents modes de pulsation de l'étoile.

Table 3-1.
Liste des périodes issues du spectre de HL Tau 76 d'après Dolez et al.

Périodes (s) (XCOV18)	Périodes (s) (XCOV13)	Périodes (s) (Archives)
1390.8	1347.9	1353.7 1308.7
1070.8		
1067.5		
1065.0	1065.0	
1061.8		
1060.2		
979.2		
976.4		
974.4		
971.6		
933.2	932.5	
930.6		
799.1		
798.3		
796.4	796.5	
794.1		

Table 3-1 (suite).
Liste des périodes issues du spectre de HL Tau 76 d'après Dolez et al.

Périodes (s) (XCOV18)	Périodes (s) (XCOV13)	Périodes (s) (Archives)
792.7	781.0	748.5 689.3 665.0
738.7		
664.2		
663.6		
662.8		
662.3		
661.9		
661.4		
660.1		
659.5		
	657.4	628.0
598.6		
597.1		
596.8		
542.4		
541.8		
540.9		
494.2		
493.2		
	449.8	495.0
394.3		
382.5		
	382.5	

3.3 Modélisation de HL Tau 76

3.3.1 Elaboration de modèles statiques et algorithme de sélection

Pour aboutir à une modélisation pertinente de HL Tau 76 à partir des données spectroscopiques concernant sa masse totale et sa température effective d'une part et depuis la liste de ses modes observés d'autre part, il a fallu tout d'abord élaborer une grille de modèles statiques en faisant varier les paramètres stellaires séquentiellement. On a ensuite calculé les modes *g* non-radiaux pour ces modèles afin de comparer leurs périodes avec celles déduites des observations. Pour ce faire, nous avons utilisé un algorithme capable de sélectionner le meilleur candidat parmi l'ensemble des modèles générés. Le principe de fonctionnement de l'algorithme de sélection est le suivant.

Le programme construit le modèle, calcule ses pulsations adiabatiques de degrés $\ell=1$ puis $\ell=2$; on indique par ailleurs en données d'entrée la liste des périodes détectées dans le spectre de l'étoile.

Pour chaque modèle et pour chaque mode observé fournis au programme, celui-ci va rechercher dans la liste des modes de pulsation de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ qui se rapportent au modèle considéré

quelle période calculée est la plus proche de la période observée (méthode dite du χ^2 ou encore des moindres carrés).

Ainsi tous les modèles de l'échantillon se voient attribuer un nombre (qui est une addition des moindres carrés se rapportant chacun aux périodes observées introduites dans le programme) pour chacune des deux valeurs du degré ℓ . Plus ce nombre est faible et plus le modèle est en mesure de bien représenter l'étoile observée.

Notre calcul a uniquement pris en compte les périodes de pulsation correspondant aux degrés $\ell=1$ et $\ell=2$. Nous avons choisi d'ignorer les périodes des modes de degré $\ell \geq 3$ car l'effet de moyenne géométrique entraîne une diminution de la visibilité des modes lorsque leur degré sphérique ℓ augmente et on admet que les modes de degré $\ell \geq 3$ sont invisibles.

De même, les calculs sont adiabatiques car il est désormais bien établi qu'une approche adiabatique est suffisante pour déterminer les périodes de pulsation d'un modèle d'étoile variable avec une précision suffisante.

Enfin, il est idéalement nécessaire de comparer des modes calculés et observés de même degré ℓ . Si nous fournissions à l'algorithme la liste brute des périodes observées dans le spectre de l'étoile, celui-ci pourrait associer un mode calculé de degré $\ell=1$ à un vrai mode de degré $\ell=2$ et *vice versa*. Or, la séparation des modes observés en fonction de leur degré ℓ reste relativement empirique.

Dolez et al. (2005) [33] proposent 2 types d'identification pour les modes présents dans le spectre de HL Tau 76 (Tables 3-6a et 3-6b d'une part et Table 3-7 d'autre part). La Table 3-7 est plus précise et impose une identification plus stricte. Néanmoins, celle-ci se base sur des contraintes empiriques très restrictives, notamment sur l'hypothèse que la distribution des périodes observées suit étroitement le régime asymptotique. Or, dans le cadre de notre étude, nous pouvons confronter les périodes observées à des modèles réalistes dont les périodes ne suivent pas nécessairement le régime asymptotique prévu. Nous avons ainsi préféré retenir l'identification des Tables 3-6a et 3-6b et non celle de la Table 3-7 car cette dernière présente un risque d'erreur d'identification du degré ℓ des modes observés plus élevé. Lorsque Dolez et al. (2005) [33] ne peuvent statuer sur la valeur du degré ℓ d'un mode donné, celui-ci est inclus dans les 2 listes (modes pour $\ell=1$ et modes pour $\ell=2$) de modes observés que nous fournissons au programme en vue d'utiliser l'algorithme.

Par ailleurs, le programme calcule des modèles statiques complets du centre vers la surface au moyen d'une méthode de raccordement. Les équations différentielles sont intégrées vers l'extérieur à partir de conditions limites au centre, et vers le centre à partir de conditions limites à la surface (en fait à une profondeur optique $\tau=2/3$).

L'algorithme d'intégration utilise une procédure auto-adaptative de type Runge-Kutta pour optimiser l'épaisseur des couches du modèle. Le maillage du modèle est affiné au niveau des zones de transition de la composition chimique **H/He** et **He/C** pour obtenir une description suffisamment précise de ces zones de discontinuité.

Les modèles comportent approximativement 700 couches dont environ 490 décrivent l'enveloppe externe d'hydrogène et la zone de transition **H/He**, 40 la couche d'**He** et 170 le coeur de **C**.

Un si grand nombre de couches est requis pour décrire avec une précision suffisante le comportement de la fréquence de Brunt-Väisälä du modèle donc pour assurer une précision suffisante sur le calcul des modes **g**. La convergence entre les intégrations plongeante et émergente est garantie par une méthode itérative Newton-Raphson.

La structure atmosphérique découle d'un ajustement d'une loi $T - \tau$ qui provient de modèles d'atmosphère de Koester de T_{eff} et $\log g$ adaptés aux paramètres stellaires de HL Tau 76.

Les opacités moyennes de Rosseland et l'équation d'état OPAL (Iglesias & Rogers, 1996 [48]) sont utilisées pour la modélisation des couches extérieures (**H** et **He**), avec une interpolation appropriée au niveau de la zone de transition. Elles sont complétées dans les couches plus pro-

fondes par la conductivité électronique telle qu'exprimée par Itoh et al. (1983 [50] & 1984 [49]) et Mitake et al. (1984) [69].

Dans le coeur de carbone pur, l'équation d'état provient de Fontaine et al. (1977) [42].

La convection est exprimée selon la théorie de la longueur de mélange dans sa version ML2, $\alpha=0.6$ suivant les recommandations de Bergeron et al. (1995) [4].

Les zones de transition **H/He** et **He/C** sont décrites suivant l'approximation de l'équilibre de diffusion suivant Tassoul et al. (1990) [80].

Le calcul adiabatique des périodes de pulsation pour un modèle donné s'opère de la façon suivante. L'utilisateur indique le degré sphérique ℓ des modes à calculer puis le domaine de périodes sur lequel doit porter la recherche des modes et enfin la valeur du pas de balayage de cet intervalle de périodes. Lorsque la recherche des modes est lancée, le programme commence d'abord par lire le modèle pour lequel on souhaite calculer les oscillations. La lecture des paramètres physiques des différentes couches du modèle permet au programme de préparer les coefficients A_{ij} des équations adiabatiques à intégrer¹. Le programme traite ensuite les conditions limites. Pour la condition externe, on considère que la pression est évanescence à la surface de l'étoile, ce qui impose la condition sur les composantes radiale (y_1) et tangentielle (y_2) des fonctions propres des modes : $y_1 - y_2 = 0$ à la surface. Pour la condition interne, la condition limite centrale utilisée est celle préconisée par Unno et al. (1989) [83]². Le programme effectue alors l'intégration en choisissant comme variable d'intégration $\ln(r/R_\star)$ (avec comme condition de normalisation $y_1 = 1$ à la surface) puis opère le balayage du domaine de périodes fixé par l'utilisateur à la recherche des changements de signe du discriminant. La convergence vers les solutions est assurée par une méthode de Newton-Raphson stabilisée par dichotomie. Une fois la détermination de tous les modes achevée, la valeur des périodes adiabatiques est communiquée à l'utilisateur.

3.3.2 Elaboration de la grille de modèles spécifiques à HL Tau 76

Paramètres libres, fixes et variables

Avant de débiter la construction d'une grille de modèles, il faut tout d'abord envisager le problème des paramètres libres qui interviennent dans le processus de modélisation. Ceux-ci sont au nombre de 7 :

- la masse totale de l'étoile M_\star
- la fraction de masse d'hydrogène $q(H) = M(H)/M_\star$
- la fraction de masse d'hélium $q(He) = M(He)/M_\star$
- la température effective T_{eff}
- la vitesse de rotation stellaire et la présence éventuelle d'une rotation différentielle au sein de l'étoile
- la composition chimique du coeur de l'étoile
- la version de la théorie de la longueur de mélange (MLT)

Nous avons choisi de faire varier seulement les 4 premiers paramètres dans notre étude. Le coeur de l'étoile est toujours considéré comme totalement constitué de **C** dégénéré, la rotation stellaire (différentielle ou non) est ignorée et nous avons choisi pour la théorie de la longueur de mélange la version ML2 avec $\alpha=0.6$.

Les résultats obtenus à l'issue de notre analyse ont confirmé que ces 3 simplifications ne sont pas

¹Il s'agit des équations (2.1) et (2.2) exposées dans le Chapitre 2.

²Unno et al. suggèrent comme condition au centre de l'étoile : $(\frac{C_1 \omega^2}{\ell}) y_1 - y_2 = 0$ avec $C_1 = \frac{(r/R_\star)^3}{M(r)/M_\star}$ et $\omega^2 = (\sigma^2 R_\star^3)/(GM_\star)$.

invalidantes et débouchent sur une modélisation satisfaisante de HL Tau 76.

Concernant les paramètres variables, nous avons choisi de les déterminer de façon séquentielle en fonction de leur impact respectif sur le comportement des modes du spectre de l'étoile.

Nous avons donc commencé par celui qui influence le plus les modes de pulsation, c'est à dire $q(H)$, puis nous avons étudié la masse totale de l'étoile (M_\star) et enfin sa température effective (T_{eff}). La teneur en hélium $q(He)$ a pu être déduite grâce à deux considérations théoriques.

Détermination de $q(H)$

Les données spectroscopiques de HL Tau 76 d'après Bergeron et al. (1995 [4] & 2004 [5]) : $M_\star = 0.55 (\pm 0.03) M_\odot$ et $T_{eff} = 11\,450 (\pm 200) \text{ K}$ ont servi de point de départ à l'élaboration de notre grille de modèles.

Dans un premier temps, les modèles ont tous présenté la même masse ($M_\star = 0.55 M_\odot$) et la même fraction de masse d'hélium ($\log q(He) = -2$, valeur qui est généralement prise par défaut pour la modélisation de la plupart des étoiles ZZ Ceti). Nous avons fait varier la fraction de masse d'hydrogène suivant un premier découpage assez grossier : $\log q(H) = -10, -8, -6, -4$. Ce maillage a ensuite été affiné en fonction des premiers résultats que l'algorithme de sélection a délivré. En outre, ce même échantillonnage de $q(H)$ a été appliqué sur 3 rangées de modèles se différenciant par leur température effective, respectivement égale à 11350 K, 11450 K et 11550 K.

Si l'algorithme a été dans l'incapacité de sélectionner une température effective parmi les trois proposées, il a en revanche systématiquement favorisé les modèles les plus hydrogénés, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\log q(H) \geq -6$. Par conséquent, nous avons pu raffiner le maillage initial en le complétant avec des modèles présentant $\log q(H) = -5, -4.3, -3.3$ et -3 , toujours pour les 3 mêmes valeurs de température effective.

Les modèles avec $\log q(H) = -3$ ne sont pas réalistes car la théorie de l'évolution stellaire ne prévoit pas qu'une si grande quantité d'hydrogène puisse encore subsister dans une naine blanche DA. Cependant, ces modèles ont été utiles afin de bien isoler les minima du χ^2 . Ils permettent en effet de vérifier que la courbe χ^2 vs. $\log q(H)$ remonte une fois la valeur optimale atteinte puis dépassée.

Ainsi, un ensemble complet de 24 modèles a été construit puis analysé au moyen de notre algorithme. Pour chaque valeur de $q(H)$, les 3 χ^2 se rapportant à chacune des 3 T_{eff} ont été moyennés pour les modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$. Ces résultats sont présentés dans les Fig. 3.1 et Fig. 3.2. Ces deux figures montrent clairement que le minimum des courbes du χ^2 est atteint par les modèles qui présentent une enveloppe d'hydrogène ayant une masse comprise entre 1 et $5 \times 10^{-4} M_\star$. Pour obtenir la fraction de masse d'hydrogène la plus probable statistiquement parlant, une moyenne pondérée a été calculée à partir des 8 meilleurs modèles de l'échantillon (en excluant systématiquement les modèles avec $q(H) = 10^{-3}$ car ils sont physiquement irréalistes), les coefficients de pondération étant inversement proportionnels au χ^2 se rapportant au modèle considéré. Les moyennes pondérées déduites pour les modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ sont en parfait accord et débouchent conjointement sur une valeur de $M(H) = 2.35 \times 10^{-4} M_\star$.

La fraction de masse d'hydrogène de HL Tau 76 a donc été déterminée.

Détermination de $q(He)$

La très forte teneur en hydrogène déterminée pour HL Tau 76 permet une évaluation très précise de sa fraction de masse d'hélium grâce à deux considérations théoriques.

La première condition, qui est d'ailleurs la plus impérative, impose une limite supérieure proche de 10^{-2} pour la fraction de masse d'hélium afin que la base de la couche d'hélium ne puisse pas être suffisamment chaude pour entrer en fusion thermonucléaire.

La seconde condition implique que la couche d'hélium soit environ 50 à 100 fois plus épaisse que l'enveloppe d'hydrogène pour éviter le chevauchement entre les zones de transition de composition chimique de l'enveloppe d'hydrogène et du sommet du coeur de carbone. En effet, si ces deux zones se chevauchaient, le carbone pourrait diffuser et atteindre la surface de l'étoile. Or, les raies du carbone ne sont pas visibles dans les spectres des étoiles ZZ Ceti. Une seule valeur de la fraction de masse d'hélium pour HL Tau 76 peut donc satisfaire simultanément ces deux contraintes : $q(He) = 10^{-2}$.

Détermination de la masse totale M_* de HL Tau 76

D'après Bergeron et al. (1995 [4] & 2004 [5]), les mesures spectroscopiques de $\log g$ indiquent que HL Tau 76 doit avoir une masse comprise entre $0.52 M_\odot$ et $0.58 M_\odot$.

Néanmoins, dans notre processus de modélisation, nous avons choisi de dépasser légèrement les limites de cet intervalle afin de cerner clairement les minima du χ^2 .

Tous les modèles de cette nouvelle grille ont une masse d'hydrogène $M(H) = 2.35 \times 10^{-4} M_*$, une masse d'hélium $M(He) = 10^{-2} M_*$ et la T_{eff} prend encore les 3 valeurs : 11350 K, 11450 K et 11550 K.

Pour la masse totale, nous avons choisi l'échantillonnage suivant : $0.52 M_\odot$, $0.55 M_\odot$ et $0.58 M_\odot$ pour commencer. L'analyse au moyen de l'algorithme de ces premiers modèles indique que la masse totale de HL Tau 76 doit se situer autour de la borne supérieure de l'intervalle suggéré par la spectroscopie, quelque soit la T_{eff} du modèle. En conséquence, la grille précédente a été complétée par l'adjonction de modèles ayant une masse de 0.56, 0.57, 0.59, 0.60 et $0.62 M_\odot$.

Les deux dernières valeurs de la masse totale excèdent largement l'intervalle autorisé par la spectroscopie. Cependant, il est pertinent de les inclure dans cette étude car ces modèles sont utiles pour cerner clairement la masse la plus probable dans le plan χ^2 vs. M_* comme illustré par les Fig. 3.3 et Fig. 3.4.

Pour les modes de degré $\ell=1$, les modèles ayant $M_* = 0.57 M_\odot$ sont présentés comme ceux ayant le plus faible χ^2 alors que les modèles avec $M_* = 0.58 M_\odot$ sont sélectionnés comme les plus probables pour les modes de degré $\ell=2$.

Concernant la marge d'incertitude à attribuer à ces 2 résultats, on peut estimer l'intervalle de masse totale au sein duquel le χ^2 des modèles résultants n'excède pas 10 % du minimum absolu du χ^2 . Pour les modes de degré sphérique $\ell=1$, $\chi_{min}^2 = 5200$ donc nous retenons les modèles pour lesquels $\chi^2 \leq 5720$, ce qui correspond à l'intervalle de masse totale $M_* = [0.56 M_\odot, 0.58 M_\odot]$. Pour les modes de degré sphérique $\ell=2$, $\chi_{min}^2 = 1700$ donc nous estimons recevables les modèles pour lesquels $\chi^2 \leq 1870$, ce qui est représenté par l'intervalle de masse totale $M_* = [0.57 M_\odot, 0.59 M_\odot]$. La cohérence de ces deux évaluations indépendantes de la masse de HL Tau 76 est satisfaite pour une masse totale $M_* = 0.575 (\pm 0.005) M_\odot$. Il est intéressant de remarquer que cette masse correspond à la limite supérieure de l'intervalle spectroscopique.

De plus, on peut aussi noter que $M_* = 0.60 M_\odot$ représente un minimum secondaire dans les courbes, aussi bien pour les modes de degré $\ell=1$ que $\ell=2$. Cette dernière valeur tombe néanmoins en dehors de l'intervalle spectroscopique et elle est de toute manière moins pertinente que $M_* = 0.575 (\pm 0.005) M_\odot$, elle peut donc être rejetée sans risque.

Comme la masse totale M_* est à présent déterminée avec précision, il est prudent de vérifier *a posteriori* la validité de la détermination de la fraction de masse d'hydrogène.

La grille de modèles utilisée pour déterminer $q(H)$ a donc été recalculée et réanalysée en remplaçant la masse totale antérieure des modèles ($0.55 M_\odot$) par $0.575 M_\odot$.

Les modèles avec $\log q(H) \leq -6$ ont été ignorés et nous avons construit des modèles supplémentaires pour lesquels $\log q(H) = -3.4, -3.5$ et -3.6 . Cette vérification a mis en évidence le modèle

ayant $\log q(H) = -3.6$ comme le meilleur, aussi bien pour les modes de degré $\ell=1$ que pour ceux de degré $\ell=2$ et a ainsi confirmé l'évaluation initiale de la fraction de masse d'hydrogène de HL Tau 76. Il est ainsi vérifié que la masse de l'enveloppe d'**H** doit effectivement être égale à $M(H) = 2.35 \times 10^{-4} M_{\star}$. L'incertitude qu'il faut affecter à cette valeur peut correspondre à la variation de $q(H)$ nécessaire pour accroître de 10 % le χ^2 dérivé pour le modèle ayant $M(H) = 2.35 \times 10^{-4} M_{\star}$. Cette augmentation du χ^2 s'obtient pour une différence de $10^{-5} M_{\star}$ autour de la valeur $M(H) = 2.35 \times 10^{-4} M_{\star}$, aussi bien pour les modes de degré $\ell=1$ que de degré $\ell=2$. Par conséquent, nous estimons que la masse de l'enveloppe d'hydrogène de HL Tau 76 vaut $M(H) = 2.35 (\pm 0.10) \times 10^{-4} M_{\star}$.

Détermination de la T_{eff} de HL Tau 76

Toujours d'après Bergeron et al. (1995 [4] & 2004 [5]), les données spectroscopiques suggèrent que HL Tau 76 possède une température effective se situant dans un intervalle compris entre 11250 K et 11650 K, avec un maximum de probabilité autour de 11450 K.

Pour cette détermination, nous avons construit deux grilles de modèles parallèles. Les modèles qui les composent ont en commun la même teneur en hydrogène, $q(H) = 2.35 \times 10^{-4}$, et en hélium, $q(He) = 10^{-2}$. Dans la première grille, la masse totale est fixée à $0.575 M_{\odot}$ puis à $0.565 M_{\odot}$ dans la seconde³.

Le découpage en température effective repose sur une différence moyenne de 30 K entre deux modèles consécutifs dans la première grille alors que cet écart est porté à 60 K dans la seconde. Les résultats donnés par l'algorithme de sélection montrent qu'il n'est pas possible de contraindre efficacement la température effective d'une étoile DA variable au moyen de méthodes astérosismologiques dans le domaine de T_{eff} qui concerne HL Tau 76. En effet, les courbes des χ^2 en fonction de la T_{eff} ne présentent aucun minimum significatif aussi bien pour les modes de degré $\ell=1$ que $\ell=2$ et aussi bien pour la première grille de modèles que pour la seconde.

Cet échec n'est pas surprenant dans la mesure où les modes de pulsation ne sont que très peu sensibles à une faible variation de la T_{eff} dans le domaine de valeurs considéré.

En conséquence, il a fallu étudier au cas par cas les modèles de la première grille et comparer leurs modes manuellement avec le spectre observé de HL Tau 76 afin d'extraire le meilleur candidat. Les différences entre les spectres de tous ces modèles, pour un même degré ℓ , sont réellement faibles, ce qui souligne à nouveau que la température effective n'influence sensiblement pas les modes de pulsation pour le domaine de T_{eff} se rapportant à HL Tau 76. Néanmoins, une étude minutieuse de l'ensemble des modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ a permis de placer le modèle de $T_{eff}=11375$ K comme ayant le spectre le plus proche du spectre observé de HL Tau 76. Une différence de 30 K autour de cette valeur est par ailleurs suffisante pour rendre moins précise l'adéquation entre le spectre observé de HL Tau 76 et le spectre synthétique du modèle correspondant. Nous considérons donc que HL Tau 76 a pour température effective : $T_{eff} = 11375 (\pm 30)$ K. La détermination des 4 paramètres variables est achevée et nous pouvons à présent étudier les caractéristiques du meilleur modèle retenu pour représenter cette ZZ Ceti.

³La masse totale choisie pour les modèles de la seconde grille est légèrement en-deçà de la limite inférieure de l'intervalle de valeurs déterminé pour M_{\star} . Cela n'est pas problématique car les résultats issus de cette deuxième grille ne servent qu'à des fins de vérification.

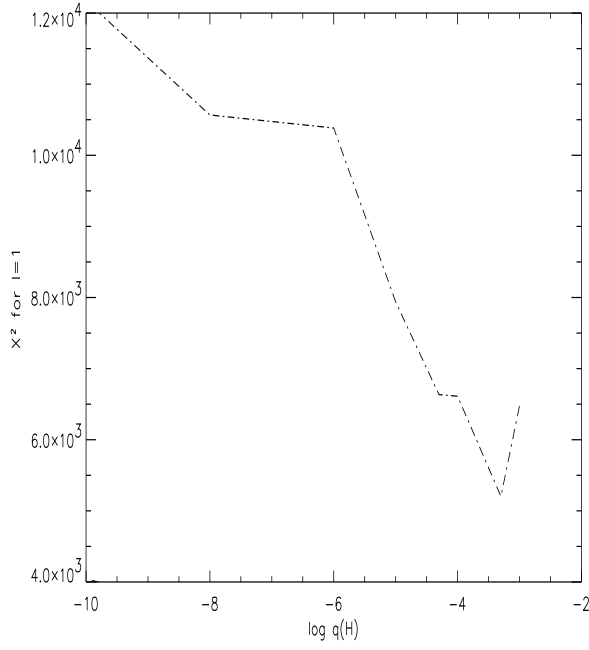


FIG. 3.1 – χ^2 en fonction de $\log q(H)$ pour les modes de degré $\ell=1$ avec $M_\star=0.55 M_\odot$

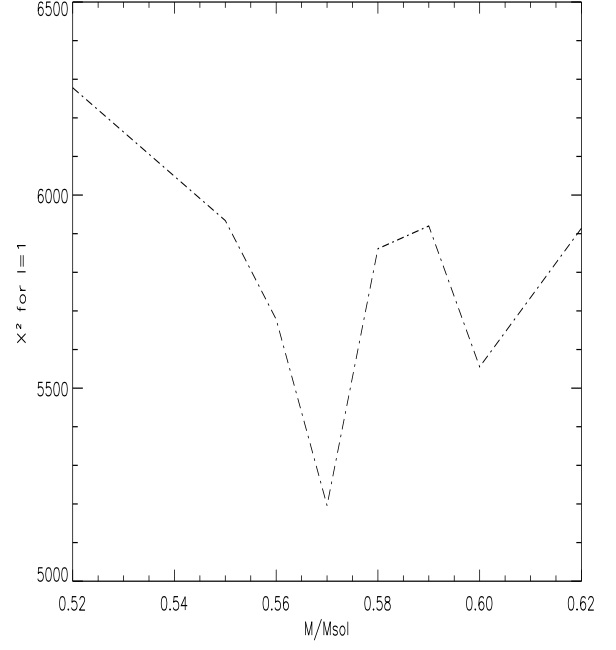


FIG. 3.3 – χ^2 en fonction de M_\star pour les modes de degré $\ell=1$

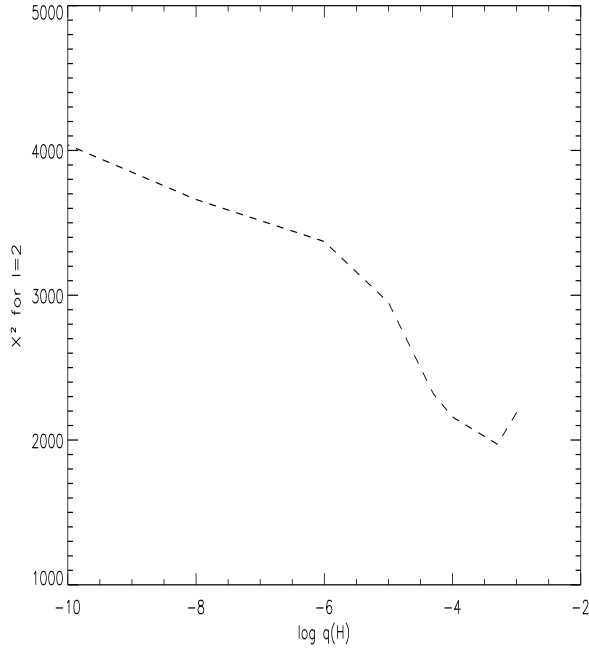


FIG. 3.2 – χ^2 en fonction de $\log q(H)$ pour les modes de degré $\ell=2$ avec $M_\star=0.55 M_\odot$

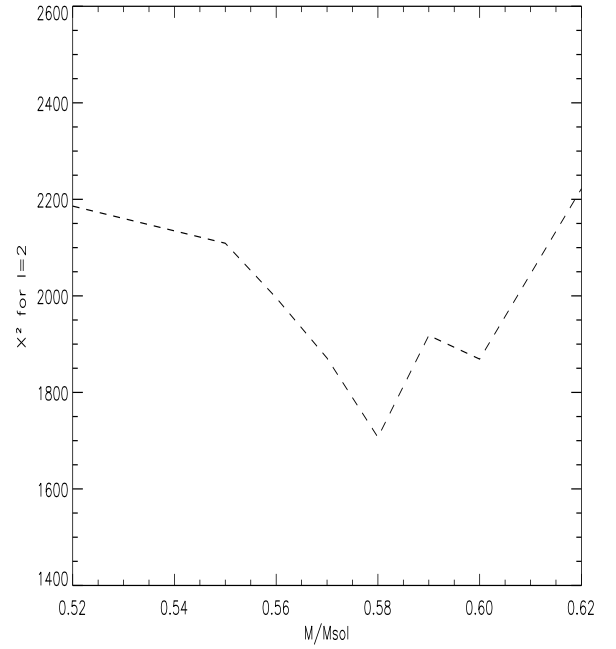


FIG. 3.4 – χ^2 en fonction de M_\star pour les modes de degré $\ell=2$

3.4 Caractéristiques du modèle représentant HL Tau 76

3.4.1 Caractéristiques structurales

L'étude précédente a permis de déterminer avec précision la teneur en hydrogène, la teneur en hélium, la masse totale et la température effective de HL Tau 76 et elle a débouché sur la mise en évidence d'un modèle stellaire très proche de l'étoile réelle. En plus des 4 paramètres précédents, cette modélisation permet de déduire le rayon et la luminosité de l'étoile. Tous ces paramètres physiques sont résumés dans la Table 3-2.

Table 3-2. Paramètres du modèle représentant HL Tau 76

Masse totale	$M_{\star} = 0.575 (\pm 0.005) M_{\odot}$
Température effective	$T_{eff} = 11375 (\pm 30) \text{ K}$
Masse de l'enveloppe d'hydrogène	$M(H) = 2.35 (\pm 0.10) \times 10^{-4} M_{\star}$
Masse de la couche d'hélium	$M(He) = 10^{-2} M_{\star}$
Luminosité	$L = 0.00389 L_{\odot}$
Rayon stellaire	$R = 0.01620 R_{\odot}$

3.4.2 Spectre du modèle : modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$

Nous avons calculé les modes adiabatiques de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ pour le modèle retenu sur un domaine de périodes couvrant celui des modes observés dans le spectre de l'étoile. Ces modes sont présentés dans la Table 3-3 (modes de degré $\ell=1$) et dans la Table 3-4 (modes de degré $\ell=2$).

Brassard et al. (1992) [14] ont montré qu'une enveloppe d'hydrogène épaisse dans une naine blanche variable n'était pas favorable au phénomène du *mode trapping*.

Notre étude vient de prouver que HL Tau 76 possède une enveloppe d'hydrogène très épaisse et par conséquent son spectre de pulsation ne doit pas présenter de modes piégés. Ainsi, tracer l'énergie cinétique de ses modes de pulsation en fonction de leur période respective ne doit révéler aucun minimum notable dans les courbes. Cette prédiction théorique se trouve vérifiée par les Fig. 3.5 et Fig. 3.6 qui présentent l'énergie cinétique des modes de pulsation, respectivement de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$, en fonction de leur période respective.

Table 3-3. Modes adiabatiques de degré $\ell=1$ pour le modèle représentant HL Tau 76

k	période (s)	k	période (s)
1	135.4	14	853.6
2	265.2	15	900.0
3	305.4	16	951.7
4	361.1	17	1015.7
5	401.2	18	1059.2
6	431.5	19	1094.7
7	499.0	20	1152.5
8	557.0	21	1201.0
9	613.5	22	1256.8
10	651.8	23	1312.7
11	698.7	24	1376.7
12	742.5	25	1406.9
13	801.6	26	1455.1

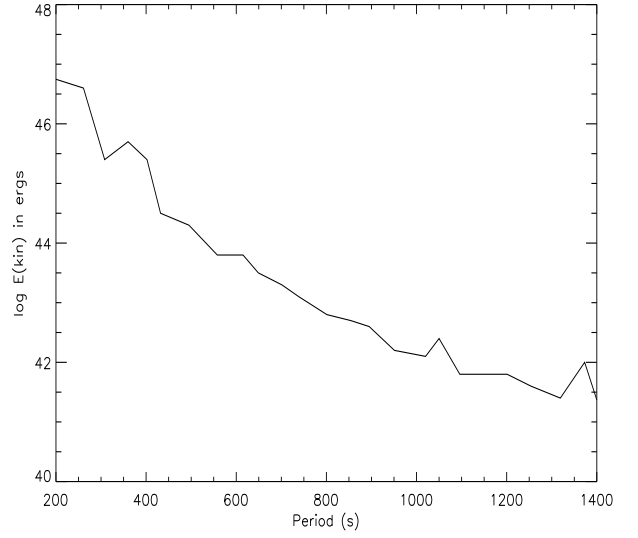


FIG. 3.5 – $\log E_{cin}$ vs. P pour les modes de degré $\ell=1$ du meilleur modèle considéré

Table 3-4. Modes adiabatiques de degré $\ell=2$ pour le modèle représentant HL Tau 76

k	période (s)	k	période (s)
1	78.2	24	798.7
2	154.4	25	825.1
3	177.2	26	846.2
4	214.3	27	877.9
5	246.5	28	905.3
6	276.7	29	929.9
7	292.8	30	960.2
8	323.8	31	991.8
9	360.1	32	1015.5
10	389.8	33	1052.0
11	417.4	34	1086.3
12	444.1	35	1105.1
13	468.5	36	1132.9
14	500.0	37	1167.1
15	527.2	38	1197.4
16	552.6	39	1220.9
17	589.1	40	1260.8
18	623.7	41	1288.6
19	648.2	42	1304.8
20	671.5	43	1342.9
21	697.0	44	1374.2
22	727.6	45	1391.2
23	759.1	46	1424.4

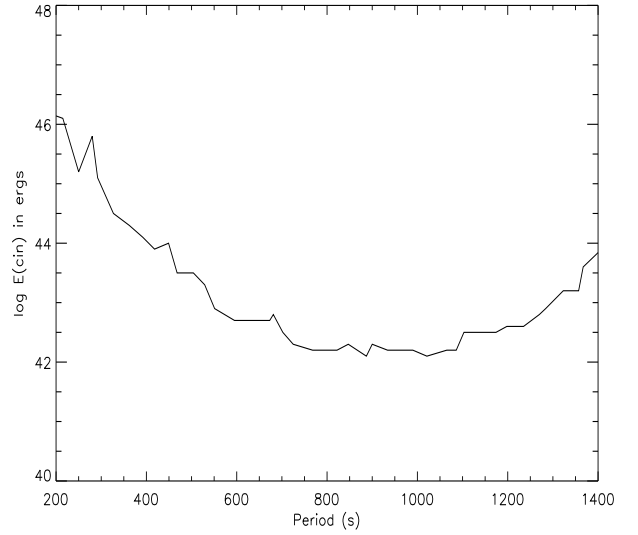


FIG. 3.6 – $\log E_{cin}$ vs. P pour les modes de degré $\ell=2$ du meilleur modèle considéré

3.5 Comparaison des modes observés et calculés. Identification des périodes observées

La justesse du modèle retenu pour représenter HL Tau 76 peut être testée en comparant les modes de degré $\ell=1$ et $\ell=2$ calculés pour ce modèle avec les pulsations que l'on observe réellement dans le spectre de l'étoile.

3.5.1 Comparaison des *period spacings* théoriques et observés

A partir des Table 3-3 et Table 3-4, il est tout d'abord possible de calculer le *period spacing* moyen théorique pour les modes de degré $\ell=1$ ($\overline{\Delta P}_{\ell=1,th}$) puis $\ell=2$ ($\overline{\Delta P}_{\ell=2,th}$) et le comparer au *period spacing* moyen observationnel que proposent Dolez et al. (2005) [33] pour les modes supposés de degré $\ell=1$ ($\overline{\Delta P}_{\ell=1,obs}$) et de degré $\ell=2$ ($\overline{\Delta P}_{\ell=2,obs}$).

Dans le cas des modes de degré $\ell=1$, $\overline{\Delta P}_{\ell=1,th}$ est calculé entre le mode d'ordre $k=4$ (période de 361.1 s) et celui d'ordre $k=25$ (période de 1406.9 s). Cet intervalle couvre approximativement le domaine de périodes observées dans le spectre de HL Tau 76 et, de plus, évite les modes de faible ordre k qui peuvent sensiblement s'éloigner du régime asymptotique.

Ainsi, $\overline{\Delta P}_{\ell=1,th} = 49.8$ s et $\overline{\Delta P}_{\ell=1,obs} = 48.0$ s. L'accord entre les 2 valeurs de $\overline{\Delta P}_{\ell=1}$ est donc satisfaisant.

De même, pour les modes de degré $\ell=2$, $\overline{\Delta P}_{\ell=2,th}$ est évalué entre le mode d'ordre $k=9$ (période de 360.1 s) et celui d'ordre $k=45$ (période de 1391.2 s) et $\overline{\Delta P}_{\ell=2,th} = 28.6$ s. Dolez et al. (2005) [33] suggèrent que $\overline{\Delta P}_{\ell=2,obs} = 27.7$ s. A nouveau, les 2 valeurs de $\overline{\Delta P}_{\ell=2}$ s'accordent très bien. Le bon accord des *period spacings* théorique et observationnel, aussi bien pour les modes de degré $\ell=1$ que de degré $\ell=2$, est déjà une bonne indication que notre candidat doit être une représentation satisfaisante de HL Tau 76.

3.5.2 Multiplets induits par l'effet du *rotational splitting*

Lorsque le spectre de fréquence d'une étoile variable est analysé, on considère que des pics fortement rapprochés entre eux dans la Transformée de Fourier traduisent le phénomène du *rotational splitting*. L'écart en fréquence entre ces pics est mis à profit pour estimer la vitesse de rotation stellaire et leur nombre (au sein d'un même groupement) révèle la valeur de leur degré ℓ . Concernant HL Tau 76, une telle analyse constitue un travail délicat car le spectre observé est complexe. Cette difficulté observationnelle induit plusieurs interprétations possibles et celle qui est exposée ci-après pourrait ne pas être la seule possible, bien que nous la considérons comme la plus probable.

Le calcul adiabatique des modes de degré sphérique $\ell=1$ puis $\ell=2$ pour le modèle retenu pour représenter HL Tau 76 a cependant permis de lever la plupart des indéterminations.

Le calcul de ces modes ne tient pas compte de l'effet du *rotational splitting* : le programme calcule des modes adiabatiques de nombre azimuthal $m=0$. Le *rotational splitting* a pour effet de supprimer la dégénérescence qui affecte le nombre azimuthal m de chaque membre d'un même multiplet (engendré par un même mode central d'ordre $m=0$) suivant la relation :

$$\sigma_{k,\ell,m} = \sigma_{k,\ell} + m \times (1 - C_{k,\ell}) \times \Omega$$

où k représente l'ordre radial, ℓ le degré de l'harmonique sphérique et m traduit le nombre azimuthal.

Par ailleurs en faisant l'approximation d'une rotation faible,

$$C_{k,\ell} = \frac{\int_0^R \rho r^2 [2a(r)b(r) + b(r)^2] dr}{\int_0^R \rho r^2 [a(r)^2 + \ell(\ell+1)b(r)^2] dr}$$

d'après Ledoux et Walraven (1958) [64]. Dans cette dernière expression, $a(r)$ désigne le déplacement radial élémentaire et $b(r)$ le déplacement tangential élémentaire.

Lorsque l'ordre radial est élevé (cas de la limite asymptotique), $C \sim 1/[\ell(\ell+1)]$.

En posant $\delta f = (1-C) \times \Omega$, on déduit dans le cadre de l'approximation de la limite asymptotique que : $\delta f_{\ell=1} = 0.6 \times \delta f_{\ell=2}$.

Cette dernière équation mène à une excellente estimation de $\delta f_{\ell=2}$ connaissant $\delta f_{\ell=1}$ et *vice versa*. D'après Dolez et al. (2005) [33], les multiplets observés dans le spectre de HL Tau 76 impliquent que $\delta f_{\ell=1} = 2.54 \mu\text{Hz}$ et par conséquent $\delta f_{\ell=2} = 4.23 \mu\text{Hz}$.

Les valeurs numériques de $\delta f_{\ell=1}$ et de $\delta f_{\ell=2}$ rendent possible le calcul de la période de tous les membres de tous les multiplets générés par les modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ calculés par le programme pour le meilleur représentant de HL Tau 76.

En toute rigueur, les expressions numériques ci-dessus pour $\delta f_{\ell=1}$ et $\delta f_{\ell=2}$ ne sont valables que dans le cadre de la limite asymptotique, c'est-à-dire pour les modes d'ordre radial élevé. Or, tel que discuté par Dolez et al. (2005) [33] et confirmé par l'identification des modes présentée ci-après, les pulsations observées dans le spectre de HL Tau 76 correspondent à des modes de degré $\ell=1$ d'ordre $k \geq 4$ et $k \geq 10$ pour les modes de degré $\ell=2$. C'est pourquoi, nous estimons que ces valeurs de l'ordre radial k sont suffisamment élevées pour que le régime asymptotique reste valide pour tous les modes observés dans le spectre de l'étoile HL Tau 76.

3.5.3 Associer les modes observés et les modes calculés

A partir de toutes les données théoriques et observationnelles exposées précédemment, nous avons réalisé une identification des modes présents dans le spectre de HL Tau 76. Cette identification est présentée dans la Table 3-5.

La première colonne reporte les périodes calculées qui s'accordent le mieux avec les périodes observées, en intégrant l'effet du *rotational splitting* lorsque nécessaire.

Les trois colonnes suivantes donnent l'identification retenue pour le degré ℓ , l'ordre radial k et le nombre azimuthal m .

La cinquième colonne indique les périodes observées qui servent de référence à l'identification. La différence absolue entre les périodes calculées et observées, $|\overline{\delta P}|$, est exprimée dans la colonne suivante. Lorsque des valeurs légèrement différentes sont allouées à un même mode, comme cela arrive quelquefois pour un ensemble de périodes provenant de sources observationnelles différentes, nous retenons la valeur moyenne.

La dernière colonne donne les différences relatives entre périodes calculées et observées ($|\overline{\delta P}|/P$). Dans quelques cas d'identification ambiguë portant sur la valeur du degré ℓ , nous avons retenu la solution qui fournissait à la fois le meilleur ajustement *et* une valeur cohérente (la plus constante possible) pour $|\overline{\delta P}|$ au sein d'un même multiplet.

Cet appariement des modes est représenté graphiquement par les Fig. 3.7 à Fig. 3.10.

3.6 Discussion

3.6.1 Qualité de l'ajustement entre les modes observés et calculés

La Table 3-5 suggère de nombreux commentaires.

En premier lieu, on peut s'attacher à considérer la qualité d'ensemble de l'ajustement entre les modes observés dans le spectre de HL Tau 76 et les modes calculés pour le modèle qui représente l'étoile.

Pour ce faire, on peut tout d'abord envisager la quantité $|\overline{\delta P/P}|$ et définir une échelle d'évaluation selon ce critère. Il n'existe pas de moyen pour quantifier objectivement la qualité d'un appariement entre modes calculés et observés, c'est pourquoi nous choisissons l'échelle subjective suivante qui définit 4 niveaux qualitatifs. L'identification d'un mode peut être considérée comme :

- excellente si $|\overline{\delta P/P}| \leq 0.5\%$
- bonne si $0.5\% < |\overline{\delta P/P}| \leq 1.0\%$
- acceptable si $1.0\% < |\overline{\delta P/P}| \leq 1.5\%$
- mauvaise si $1.5\% < |\overline{\delta P/P}|$.

Le dernier cas de figure (mauvaise identification) peut aussi signifier qu'aucune période dans la liste des modes calculés à partir du modèle retenu ne peut rendre compte de la pulsation observée et cette période observée est vraisemblablement un faux mode (combinaison linéaire ou harmonique). En suivant cette classification, on peut évaluer la pertinence de l'identification proposée pour les modes du spectre de HL Tau 76.

Alors que Dolez et al. (2005) [33] isolent un total de 44 modes observés dans le spectre de cette étoile, la Table 3-5 présente seulement 37 valeurs car certaines fréquences sont tellement rapprochées dans le spectre de puissance qu'elles ne peuvent que désigner un même et unique mode. Ainsi, la Table 3-5 montre que l'identification est excellente pour 17 modes, bonne pour 13 modes, acceptable pour 3 modes et mauvaise pour 3 modes ; la période à 781.0 s ne pouvant absolument pas être identifiée à partir des modes de notre modèle. Nous discuterons ci-après ce cas particulier.

La valeur moyenne de $|\overline{\delta P/P}|$ pour l'ensemble des modes de la Table 3-5 est de 0.7 %, valeur qui traduit en l'état actuel des choses un très bon appariement global entre les modes observés dans l'étoile et ceux calculés pour le modèle. En outre, même l'identification la moins précise (pour le mode à 542.4 s) se voit affectée d'un $|\overline{\delta P/P}| < 2.0\%$ ($|\overline{\delta P/P}| = 1.9\%$).

Une autre façon d'exprimer la qualité d'ensemble de l'ajustement entre les modes observés et calculés consiste à estimer les deux écart-types : $\sigma = (\Sigma |\overline{\delta P}|)/n$ et $\sigma_{rms} = \sqrt{(\Sigma |\overline{\delta P}|^2)/n}$ où n désigne le nombre total de modes sur lequel porte l'estimation.

Ici, $n=36$ (et non 37) car le mode à 781.0 s n'est pas considéré par notre analyse comme une vraie pulsation. Ainsi, $\sigma=4.35$ et $\sigma_{rms}=5.27$. Comme σ et σ_{rms} sont calculés sur un grand nombre de modes (36), ces 2 écart-types confirment que l'identification globale des modes de HL Tau 76 est satisfaisante. On peut par ailleurs insister sur le fait que les périodes calculées présentées dans la Table 3-5 reposent sur des valeurs théoriques obtenues à partir des modes de degrés sphériques $\ell=1$ et $\ell=2$ (et de nombre azimuthal $m=0$) calculés pour le meilleur modèle pour lesquels on a appliqué invariablement l'effet du *rotational splitting* tel que calculé par Dolez et al. (2005) [33] à partir des observations.

Cette valeur du *rotational splitting* a été déduite d'après un petit nombre de multiplets bien identifiés d'ordres k élevés. Or, si les données observationnelles ne peuvent mettre en évidence une variation du *rotational splitting* avec la durée de la période des modes, une telle variation ne peut être totalement exclue. L'hypothèse d'un *rotational splitting* constant pour l'ensemble du spectre de HL Tau 76 entre dans l'évaluation des 2 écart-types σ et σ_{rms} . Par conséquent, si

une partie du désaccord qui se manifeste entre les valeurs des modes observés et calculés qui leur correspondent provient de cette hypothèse d'un *rotational splitting* constant, il doit alors exister une corrélation entre la valeur de $|\overline{\delta P/P}|$ et celle de la période du mode considéré puisqu'on suppose une variation continue de $|\delta P/P|$ en fonction de la période des modes.

En examinant la dernière colonne de la Table 3-5, on remarque que les longues périodes d'oscillation sont généralement identifiées avec une meilleure précision que les courtes. Ceci peut révéler une possible variation du *rotational splitting* avec la durée de la période des modes, variation qui pourrait être l'indice d'une rotation différentielle de HL Tau 76. Néanmoins, l'effet du *rotational splitting* a été évalué observationnellement d'après des multiplets de modes pour lesquels le régime asymptotique est vérifié puis considéré constant pour l'ensemble des modes observés. La diminution de la qualité de l'ajustement entre périodes calculées et observées d'une part avec la réduction de la durée des périodes (donc avec la décroissance de l'ordre radial k des modes correspondants) d'autre part peut également provenir du fait que les relations du régime asymptotique ne sont plus nécessairement valables pour les modes d'ordres radiaux plus faibles ; ce qui par conséquent pourrait aussi justifier la dégradation constatée de la qualité de l'adéquation entre modes calculés et observés pour les plus courtes périodes. Aussi, la variation du *rotational splitting* avec la période des modes n'est pas uniquement justifiable par une rotation non-uniforme de l'étoile. Cette hypothèse est même d'autant plus incertaine que Tassoul & Tassoul (1983) [79] ont montré qu'une courbe de rotation solide représente extrêmement bien la courbe de rotation des naines blanches.

Par conséquent, expliquer la variation du *rotational splitting* avec la période des modes en invoquant une rotation non-uniforme de l'étoile est une hypothèse qui doit rester spéculative.

Table 3-5. Identification la plus probable des modes observés dans le spectre de HL Tau 76

Période calculée	degré ℓ	ordre k	nombre m	Période(s) observée(s)	$ \overline{\delta P} $	$ \overline{\delta P/P} $ (%)
388.5 s	2	10	2	382.5 s	6.0 s	1.5
391.1 s	2	10	-2	394.3 s	3.2 s	0.8
445.8 s	2	12	-2	449.8 s	4.0 s	0.9
497.9 s	2	14	2	493.2 s	4.7 s	0.9
498.9 s	2	14	1	494.2 s	4.7 s	0.9
500.0 s	2	14	0	495.0 s	5.0 s	1.0
550.0 s	2	16	2	540.9 s - 541.0 s	9.0 s	1.6
551.3 s	2	16	1	541.8 s	9.5 s	1.7
552.6 s	2	16	0	542.4 s	10.2 s	1.8
590.6 s	2	17	-1	596.8 s - 597.0 s - 597.1 s	6.4 s	1.1
592.1 s	2	17	-2	598.6 s	6.5 s	1.1

Table 3-5 (suite). Identification la plus probable des modes observés dans le spectre de HL Tau 76

Période calculée	degré ℓ	ordre k	nombre m	Période(s) observée(s)	$ \overline{\delta P} $	$ \overline{\delta P/P} $ (%)
627.1 s	2	18	-2	628.0 s	0.9 s	0.1
650.7 s	1	10	1	657.4 s	6.7 s	1.0
651.8 s	1	10	0	659.5 s - 660.1 s	8.0 s	1.2
652.9 s	1	10	-1	661.4 s - 661.9 s	8.8 s	1.3
667.6 s	2	20	2	662.3 s - 662.8 s	5.1 s	0.8
669.6 s	2	20	1	663.6 s - 664.2 s - 665.0 s	5.3 s	0.8
692.8 s	2	21	2	689.3 s	3.5 s	0.5
741.1 s	1	12	1	738.7 s	2.4 s	0.3
743.9 s	1	12	-1	748.5 s	4.6 s	0.6
?	?	?	?	781.0 s	?	?
793.3 s	2	24	2	792.7 s - 794.1 s	0.1 s	0.0
796.0 s	2	24	1	796.4 s - 796.5 s	0.5 s	0.1
798.7 s	2	24	0	798.3 s - 799.1 s	0.0 s	0.0
929.9 s	2	29	0	930.6 s	0.7 s	0.1
933.6 s	2	29	-1	932.5 s - 933.2 s	0.8 s	0.1
964.2 s	2	30	-1	971.6 s	7.4 s	0.8
968.2 s	2	30	-2	974.4 s - 976.4 s	7.2 s	0.7
983.4 s	2	31	2	979.2 s	4.2 s	0.4
1056.8 s	2	33	-1	1060.2 s	3.4 s	0.3
1061.6 s	2	33	-2	1061.8 s	0.2 s	0.0
1059.2 s	1	18	0	1065.0 s	5.8 s	0.5
1062.1 s	1	18	-1	1067.5 s	5.4 s	0.5
1076.2 s	2	34	2	1070.8 s	5.4 s	0.5
1308.2 s	1	23	1	1308.7 s	0.5 s	0.0
1350.7 s	2	43	-1	1347.9 s - 1353.7 s	0.1 s	0.0
1391.2 s	2	45	0	1390.8 s	0.4 s	0.0

D'autre part, il faut rappeler que HL Tau 76 présente une température effective qui la situe proche du bord rouge de la bande d'instabilité des ZZ Ceti où la convection doit de plus en plus interagir avec les pulsations et perturber le comportement théorique des modes. Sachant cela, l'identification globale des modes de HL Tau 76 est même étonnamment précise.

Comme l'instabilité des modes g dans les étoiles DAV froides est principalement induite par la convection (Brickhill, 1990 [17] & 1991 [18] ; Goldreich & Wu, 1999 [44] [45] & 2001 [93]), on peut s'attendre à ce que les modes de plus forte amplitude révèlent la signature de cette interaction avec la convection de façon plus tangible que les modes de faible amplitude.

Par exemple, les périodes des modes de grande amplitude doivent davantage s'éloigner des périodes idéales (calculées d'après la théorie linéaire des pulsations adiabatiques) que celles des modes de faible amplitude.

Si l'on examine $|\delta P/P|$ en fonction de l'amplitude du mode correspondant (l'amplitude des modes observés dans le spectre de HL Tau 76 est fournie par Dolez et al., 2005 [33]), on détecte des signes révélateurs d'une telle variation : l'accord entre modes calculés et observés est meilleur avec les modes de faible amplitude qu'avec ceux de grande amplitude. A titre d'exemple, la Table 3-5 indique que pour les membres du multiplet de périodes voisines de 541 s (qui sont les modes dominants pour les deux campagnes WET XCOV13 et XCOV18 d'après Dolez et al., 2005 [33]), la valeur de $|\delta P/P|$ est la moins satisfaisante.

Une telle variation de la qualité de l'ajustement en fonction de l'amplitude des modes peut illustrer dans quelle mesure le spectre de pulsation des modes g perturbés par la convection dans les étoiles DAV froides s'éloigne du spectre idéal prédit par la théorie linéaire.

3.6.2 Désaccords entre analyses observationnelle et théorique

La discussion précédente a permis d'identifier deux raisons possibles pour rendre compte du désaccord léger qui existe entre les périodes calculées et observées : la première cause vient de l'hypothèse d'un *rotational splitting* constant pour tout le spectre de l'étoile et la seconde se rapporte à l'effet perturbateur opéré par la convection sur les pulsations.

Ces deux facteurs doivent contribuer à justifier la différence constatée entre les périodes des modes observés et calculés d'après la théorie linéaire des pulsations non radiales.

L'une des conséquences d'un tel désaccord entre les périodes observées et calculées est que l'identification du degré ℓ pour les modes de forte amplitude revêt une incertitude plus grande : la période perturbée d'un mode réel de forte amplitude de degré $\ell=1$ peut s'avérer plus proche de celle d'un mode de degré $\ell=2$ (non affecté par la convection) que de celle du mode de degré $\ell=1$ lui correspondant dans la théorie linéaire.

Par suite, on ne peut exclure le fait que quelques uns des modes de forte amplitude identifiés dans la Table 3-5 comme des modes de degré $\ell=2$ soient en réalité des modes de degré $\ell=1$ dont les périodes sont affectées par une forte interaction avec la convection.

Il y a dans la Table 3-5 deux cas particuliers qui méritent une discussion plus approfondie : les périodes à 781.0 s et à 1065.0 s.

Les deux ont été considérées d'après l'analyse observationnelle de Dolez et al. (2005) [33] comme des combinaisons linéaires en coïncidence avec une période prédite par le régime asymptotique. En conséquence, Dolez et al. (2005) [33] ont suggéré qu'il pouvait en fait s'agir de vrais modes. Alors qu'ils n'ont pu distinguer entre le degré $\ell=1$ ou $\ell=2$ pour la période à 1065.0 s, ils ont identifié celle à 781.0 s comme un mode de degré $\ell=1$.

Les résultats de notre étude peuvent servir à dissiper l'ambiguïté qui pèse sur leur nature.

Nous identifions la période à 1065.0 s comme le mode $\ell=1$, $k=18$, $m=0$ pour lequel notre modèle prévoit une période de 1059.2 s. Ce mode aurait également pu être rattaché au membre $m=-1$ du même triplet, ce qui aurait produit un appariement meilleur. Mais suivant cette dernière hypothèse, le pic de grande amplitude (9.7 mma) à 1067.5 s (que nous considérons comme le membre $m=-1$ de ce triplet) serait resté non identifié.

Nous insistons également sur le fait que, d’après l’identification que nous retenons, les deux composantes de ce triplet ont un $|\overline{\delta P}|$ cohérent et quasiment identique (5.8 s et 5.4 s respectivement). Nous concluons alors que la période à 1065.0 s doit effectivement correspondre à un vrai mode et qu’il s’agit bien d’une vraie résonance comme le suggèrent Dolez et al. (2005) [33].

Pour la période à 781.0 s, la situation est différente.

Dolez et al. (2005) [33] n’ont absolument pas pu statuer, d’après les observations, sur la réalité de ce mode selon les critères généralement utilisés. En effet, cette période est impliquée dans une possible résonance avec les modes de périodes 1347.9 s et 494.2 s. Le pic de fréquence 2023 μHz (période de 494.2 s) est présent dans toutes les données et il a en outre une grande amplitude (27.8 mma) : l’observation permet donc de le considérer avec confiance comme un vrai mode. En revanche, les 2 autres pics de fréquence 742 μHz (période de 1347.9 s) et de fréquence 1280 μHz (période 781.0 s) n’apparaissent simultanément que dans les observations XCOV13 et en outre présentent une amplitude du même ordre de grandeur. Les critères observationnels ne permettent donc pas de distinguer clairement si les pulsations sont toutes deux des vrais modes (auquel cas il s’agirait d’une autre vraie résonance dans le spectre de HL Tau 76) ou si l’une des deux est le résultat d’une combinaison linéaire (et dans ce cas laquelle des deux). Notre modélisation s’avère utile pour connaître leur vraie nature : le mode à 494.2 s est bien identifié et cela confirme les prédictions observationnelles ; le mode à 1347.9 s est également bien reconnu par le spectre de notre modèle alors que la période à 781.0 s n’est pas identifiable. En effet, les modes de degré $\ell=1$ les plus proches issus de notre modèle sont situés à 742.5 s et 801.6 s soit à 38.5 s et 20.6 s respectivement de la période observée et ceux de degré $\ell=2$ sont à 759.1 s et 798.7 s soit éloignés de la période observée de 21.9 s et de 17.7 s respectivement.

Même en prenant en compte la correction apportée par le *rotational splitting*, la période à 781.0 s ne peut être correctement représentée par aucun mode calculé pour le modèle.

Nous pouvons alors conclure que, contrairement au cas précédent pour la période à 1065.0 s, la pulsation à 781.0 s est une combinaison linéaire et non un vrai mode d’oscillation. Notre modélisation permet donc de résorber une incertitude que l’analyse observationnelle ne pouvait pas lever.

3.7 Conclusion

La modélisation de HL Tau 76 suivant la méthode que nous avons adoptée a permis d’obtenir des contraintes précises sur la structure interne de cette ZZ Ceti grâce à la comparaison des modes \mathbf{g} calculés pour le modèle (que nous avons retenu pour représenter au mieux l’étoile) avec ceux que son spectre présente.

Comme le spectre de HL Tau 76 comporte environ 40 modes de pulsation indépendants, cette étoile DAV offre une occasion unique de mettre à profit les techniques de modélisation reposant sur l’astérosimologie afin de déduire les principaux paramètres stellaires de cette étoile.

Nous avons calculé une grille de modèles d’étoiles DA représentatifs de HL Tau 76 dont la T_{eff} et la masse étaient préalablement bien connues grâce à la spectroscopie.

Nous avons ensuite calculé les périodes des modes de gravité non-radiaux (dans le cadre de l’approximation adiabatique) pour ces modèles en vue de les confronter aux observations. Au moyen d’un algorithme reposant sur une loi des moindres carrés, nous avons ainsi pu isoler le meilleur

modèle capable de représenter l'étoile.

En suivant cette approche, nous avons été en mesure de déterminer 3 paramètres stellaires de façon très satisfaisante :

- la masse totale de l'étoile : $M_{\star} = 0.575 (\pm 0.005) M_{\odot}$
- la masse de l'enveloppe d'hydrogène : $M(H) = 2.35 (\pm 0.10) \times 10^{-4} M_{\star}$
- la masse de la couche d'hélium : $M(He) = 1.0 \times 10^{-2} M_{\star}$.

Notre algorithme de sélection, reposant sur une loi du χ^2 , n'a pas été suffisamment sensible pour révéler clairement la T_{eff} de l'étoile. Toutefois, une comparaison minutieuse des spectres des modèles a permis de considérer que $T_{eff} = 11375 (\pm 30)$ K donne le meilleur accord global.

Les calculs adiabatiques pour les modes de pulsation de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ se rapportant au meilleur modèle ont débouché sur les périodes des composants $m=0$.

Nous avons alors fait usage du *rotational splitting* déterminé par Dolez et al. (2005) [33] à partir des observations pour estimer les périodes de tous les composants des multiplets, aussi bien pour les triplets de modes de degré $\ell=1$ que pour les quintuplets de modes de degré $\ell=2$.

Il nous a alors été possible d'identifier presque tous les pics observés dans le spectre de puissance de HL Tau 76 en terme de modes de degré $\ell=1$ ou $\ell=2$ démultipliés sous l'effet de la rotation et ainsi retrouver leur ordre radial k et leur nombre azimuthal m .

La méthode d'identification a été satisfaisante puisque nous avons été capables d'ajuster 36 modes avec une précision moyenne de 0.7 %.

Nous avons remarqué que la qualité de l'ajustement pour les modes considérés séparément semble varier à la fois en fonction de leur période et de leur amplitude.

La qualité décroissante de l'ajustement avec la diminution de la période peut éventuellement s'expliquer par le fait que le *rotational splitting* utilisé pour calculer les multiplets de tous les modes du spectre de l'étoile peut ne pas être constant.

La qualité décroissante de l'ajustement avec l'augmentation de l'amplitude du mode peut être la signature de l'effet perturbateur que la convection opère sur les modes de pulsation.

L'identification du degré ℓ des modes de grande amplitude peut être affectée par cet effet, d'autant plus que nous notons à plusieurs reprises des cas de chevauchement de modes de degré $\ell=1$ avec des modes de degré $\ell=2$.

Par conséquent, la période d'un mode de degré $\ell=1$, légèrement modifiée par l'action de la convection, peut se situer plus proche de celle d'un mode de degré $\ell=2$ prédite par nos calculs linéaires adiabatiques et ainsi se retrouver à tort considérée comme un mode de degré $\ell=2$.

Non seulement notre modélisation de HL Tau 76 a permis de contraindre avec une grande précision sa masse totale et la masse de son enveloppe d'hydrogène ainsi que d'identifier les modes de son spectre de pulsation en affectant une valeur à leurs paramètres (ℓ, k, m) mais encore cette étude suggère que l'étoile serait éventuellement concernée par une rotation non uniforme (moyennant les réserves que nous avons émises concernant cette hypothèse) ; en outre notre analyse pourrait aussi illustrer dans quelle mesure la convection est susceptible de perturber le comportement des modes de gravité au sein des étoiles DAV froides proches du bord rouge de la bande d'instabilité des ZZ Ceti.

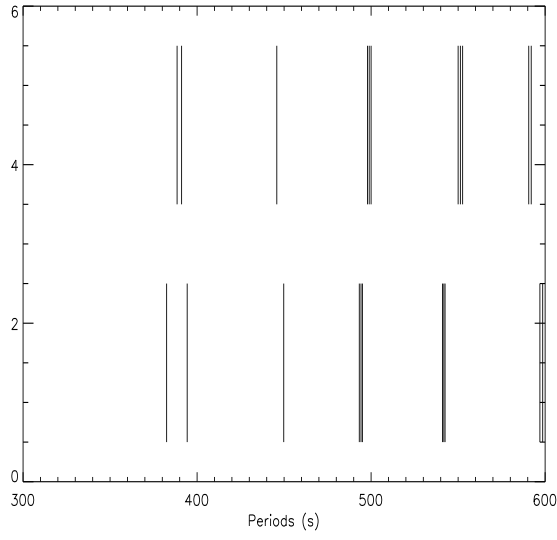


FIG. 3.7 – Spectres observé et calculé pour HL Tau 76 entre 300 s et 600 s

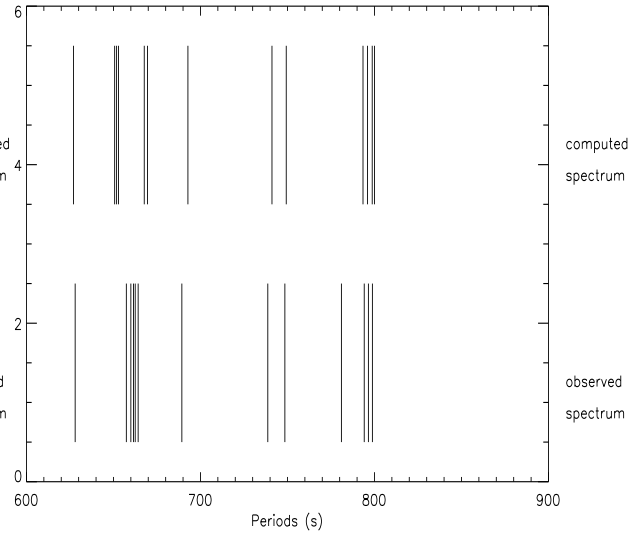


FIG. 3.9 – Spectres observé et calculé pour HL Tau 76 entre 600 s et 900 s

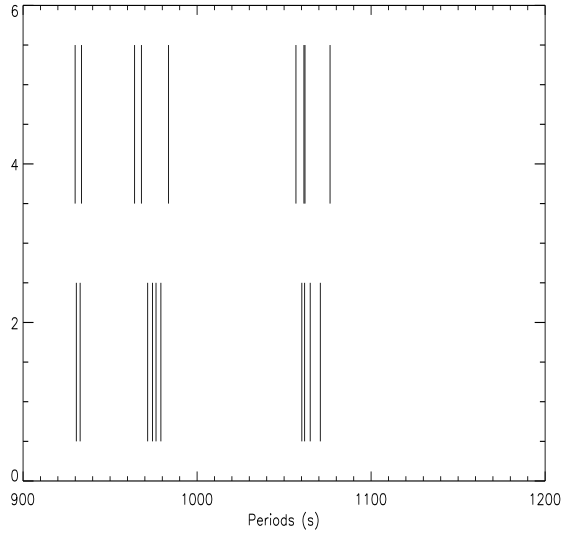


FIG. 3.8 – Spectres observé et calculé pour HL Tau 76 entre 900 s et 1200 s

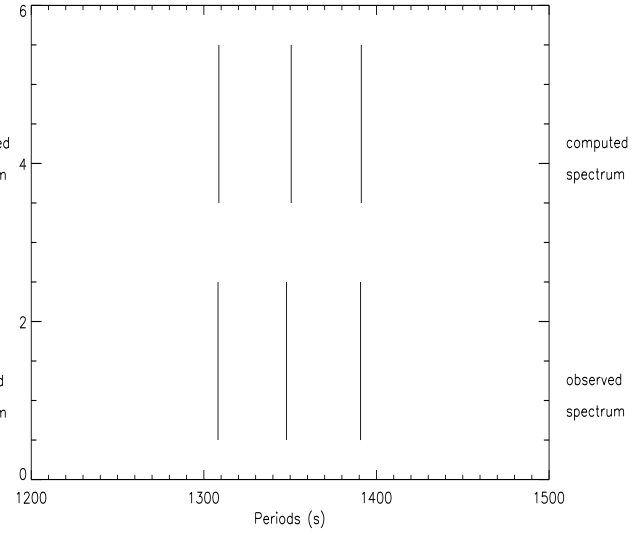


FIG. 3.10 – Spectres observé et calculé pour HL Tau 76 entre 1200 s et 1500 s

Table 3-6a. Recherche de modes $\ell=1$ possibles dans le spectre de HL Tau 76 avec $\Delta P_{\ell=1}=48.0$ s d'après l'analyse de Dolez et al.

Périodes prédites (s)	Périodes observées XCOV18 (s)	Périodes observées XCOV13 (s)	Δk
1405.8	1390.8		+18
1357.8		1347.9	+17
1309.8			+16
1261.8			+15
1213.8			+14
1165.8			+13
1117.8			+12
1069.8	1070.8 - 1067.5 - 1065.0	1065.0	+11
1021.8			+10
973.8	979.2 - 971.6		+9
925.8	933.2 - 930.6	932.5	+8
877.8			+7
829.8			+6
781.8	799.1 - 792.7	796.5 - 781.0	+5
733.8			+4
685.8			+3
637.8	659.5	657.4	+2
589.8	598.6 - 597.1 - 596.8	597.0	+1
541.8	542.4 - 541.8 - 540.9	541.0	0
493.8	493.2 - 494.2		-1
445.8		449.8	-2
397.8	382.5	382.5	-3

Table 3-6b. Recherche de modes $\ell=2$ possibles dans le spectre de HL Tau 76 avec $\Delta P_{\ell=2}=27.7$ s d'après l'analyse de Dolez et al.

Périodes prédites (s)	Périodes observées XCOV18 (s)	Périodes observées XCOV13 (s)	Δk
1380.6	1390.8		+32
1352.9		1347.9	+31
1075.9	1060.2 - 1070.8	1065.0	+21
965.1	971.6 - 979.2		+17
937.4	930.6 - 933.2	932.5	+16
798.9	792.7 - 799.1	796.5 - 781.0	+11
660.4	659.5 - 664.2		+6
632.7			+5
605.0	596.8 - 597.1 - 598.0	597.0	+4

Table 3-6b (suite). Recherche de modes $\ell=2$ possibles dans le spectre de HL Tau 76 avec $\Delta P_{\ell=2}=27.7$ s d'après l'analyse de Dolez et al.

Périodes prédites (s)	Périodes observées XCOV18 (s)	Périodes observées XCOV13 (s)	Δk
577.3	540.9 - 541.7 - 542.4	541.0	+3
549.6			+2
521.9			+1
494.2	493.2 - 494.2	494.2	0
466.5			-1
438.8			-2
411.1	382.4	382.5	-3
383.4			-4

Table 3-7. Identification la plus probable du degré ℓ des modes observés dans le spectre de HL Tau 76 d'après Dolez et al.

Périodes (s) (XCOV18)	Périodes (s) (XCOV13) (s)	Périodes (s) (Archives)	degré ℓ
1390.8	1347.9		2
			2
1070.8			2
1067.5	1065.0		1
1065.0			1, 2
1061.8			1
1060.2			2
979.2			1, 2
976.4			1, 2
974.4			1, 2
971.6			1, 2
933.2	932.5		1
930.6			1
799.1			2
798.3	796.5		1, 2
796.4			1
794.1			1
792.7	781.0		2
			1
738.7		748.5	2

Chapitre 4

Etude de la ZZ Ceti *G 185-32*

4.1 Introduction

4.1.1 Présentation de *G 185-32*

G 185-32 (aussi appelée *PY Vul* ou encore *WD 1935+279*) a été découverte comme étoile ZZ Ceti par Mc Graw (1981) [66].

Cette étoile présente des caractéristiques spectrales particulières. *PY Vul* est notamment l'une des plus brillantes ZZ Ceti connues ($V = 12.97$ mag) et son spectre comporte bon nombre de pulsations de faible amplitude.

En utilisant la version ML2, $\alpha=0.6$ de la théorie de la longueur de mélange, Bergeron et al. (1995 [4] & 2004 [5]) ont proposé une évaluation de sa masse $M_\star = 0.64 (\pm 0.03) M_\odot$ et de sa température effective $T_{eff} = 12130 (\pm 200)$ K par la spectroscopie.

En outre, cette étoile a été observée en 1992 durant la huitième campagne WET (photométrie dans le visible), par Kepler et al. (2000) [57] avec le HST Faint Object Camera (photométrie dans l'UV et l'extrême bleu) et par Thompson et al. (2003) [81] grâce à un télescope Keck (spectrométrie résolue en temps).

Castanheira et al. (2004) [20] ont présenté une première étude de *G 185-32*.

Ils ont notamment exposé les données observationnelles rattachées à cette étoile, commenté ses modes de pulsation et, en utilisant la variation de l'amplitude d'un mode en fonction de la longueur d'onde, ils ont tenté de retrouver la valeur la plus probable pour le degré ℓ des fréquences présentes dans le spectre de l'étoile et ont conclu que la pulsation de période 141.9 s devait être un faux mode (vraisemblablement sous-harmonique de la période à 70.9 s) parce que son amplitude n'augmente pas dans l'UV comme le prévoit la théorie linéaire pour les modes g non-radiaux de degré sphérique $\ell=1$ ou $\ell=2$ (Robinson et al., 1982 [75] ; Kepler, 1984 [54] ; Robinson et al., 1995 [76]). Certains de leurs résultats, néanmoins, doivent être confirmés ou clarifiés.

Par exemple, ils estiment que le mode de pulsation à 70.9 s pourrait être le mode $\ell=2, k=1$ mais ne sont pas en mesure de prouver cette affirmation.

Parfois, ils ne peuvent pas efficacement choisir entre deux hypothèses alternatives : par exemple, les pulsations de période 560.8 s, 148.5 s et 70.9 s peuvent être soit de vrais modes de pulsation soit des combinaisons linéaires de modes parents. De la même façon, lorsque des combinaisons linéaires sont suggérées, ils ne disposent pas d'argument absolu pour déterminer quels sont les modes parents et qui est le faux mode.

Par ailleurs, aucune détermination de la masse de l'enveloppe d'hydrogène de l'étoile n'est proposée bien que ce paramètre soit très important, notamment dans le cadre de la cosmochronologie. Enfin, l'étude du *rotational splitting* n'est pas envisagée alors que l'étoile semble présenter à

l’observation des modes provenant de mêmes multiplets.

Thompson et al. (2004) [82] ont également étudié les particularités du spectre de G 185-32 en se concentrant notamment sur la période à 141.9 s. Leur analyse, toutefois, repose uniquement sur des techniques observationnelles et la plupart de leurs conclusions ne peuvent être ni démontrées ni vérifiées, par exemple en s’appuyant sur une modélisation.

Ce contexte suggère qu’une étude indépendante de l’étoile G 185-32 peut s’avérer utile pour confirmer et compléter les résultats déjà obtenus par Castanheira et al. (2004) [20] et Thompson et al. (2004) [82]. C’est pourquoi nous avons décidé d’étudier cette étoile au moyen d’une modélisation reposant sur les techniques astérosismologiques.

4.1.2 Stratégie employée pour modéliser G 185-32

Le Chapitre 3 a montré comment, dans le cas de HL Tau 76, l’astérosismologie et la modélisation s’étaient avérées efficaces pour obtenir des contraintes précises sur les paramètres stellaires de l’étoile d’une part et pour identifier avec exactitude les nombreux modes présents dans son spectre d’autre part.

La stratégie mise en oeuvre reposait essentiellement sur un algorithme basé sur une loi du χ^2 qui indiquait le meilleur modèle apte à représenter la ZZ Ceti.

La force de cette méthode de détermination est qu’elle étudie l’ensemble du spectre de l’étoile et, de fait, ne laisse que peu d’incertitude quant à la validité du candidat retenu. Cependant, sa faiblesse est qu’elle est très sensible à l’identification préalable du degré ℓ des modes observés que des considérations observationnelles permettent de prédire avec une plus ou moins grande confiance.

En effet, si cette identification préliminaire est défailante pour un certain nombre de modes, l’algorithme associera alors des modes calculés et observés de degrés ℓ différents et débouchera sur un meilleur modèle caduque.

En ce qui concerne HL Tau 76, le spectre de l’étoile est assez riche (environ 40 modes indépendants) pour que le degré ℓ de quelques modes puisse être mal défini par les techniques observationnelles. De fait, notre étude a montré quelques désaccords entre la valeur assignée à ℓ par l’observation et par la modélisation. Néanmoins, ces erreurs d’identification étaient suffisamment marginales pour ne pas compromettre la fiabilité de notre meilleur modèle dont la pertinence a été démontrée par le calcul des grandeurs σ et $|\overline{\delta P/P}|$.

Pour G 185-32, les données sont différentes : le spectre de l’étoile ne présente qu’une vingtaine de modes dont certains sont en outre peu sûrs (en effet, au moins 3 pulsations dans le spectre observé peuvent être des combinaisons linéaires). C’est pourquoi une erreur redondante au niveau de la valeur du degré ℓ pourrait sensiblement altérer la justesse du candidat sélectionné par l’algorithme. Nous avons donc choisi de suivre une autre voie.

Nous avons tout d’abord considéré un mode de référence dans le spectre de G 185-32 : celui de période 72.5 s¹ pour lequel l’identification du degré ℓ est certaine.

Puisque il est très peu probable d’observer des modes de degrés $\ell \geq 3$ (à cause de l’effet de moyenne géométrique), le degré sphérique de ce mode à 72.5 s est soit $\ell=1$ ou $\ell=2$. Cependant, soit $\ell=1, k \geq 1$ ou $\ell=2, k \geq 2$ induirait pour G 185-32 une masse totale proche de la limite de Chandrasekhar, ce qui est en total désaccord avec les observations. En effet, la parallaxe étant connue ainsi que la luminosité, on peut alors déduire la T_{eff} et le rayon de l’étoile donc sa

¹Nous avons le choix, dans ce domaine de périodes observées, entre 3 modes pour servir de mode de référence : celui de période 70.9 s, celui de période 72.5 s et enfin celui de période 72.9 s. Nous avons considéré que le mode le plus central (de période 72.5 s) était celui qui avait la plus forte probabilité d’avoir le nombre azimuthal m le plus faible, idéalement égal à $m=0$.

masse M_\star d'après la relation masse-rayon des naines blanches. Cette déduction observationnelle confirme que PY Vul a une masse voisine de $0.64 M_\odot$.

Par conséquent, la pulsation à 72.5 s est nécessairement le mode $\ell=2, k=1$. Notre modélisation de PY Vul viendra confirmer ultérieurement ce résultat.

Néanmoins, Castanheira et al. (2004) [20] ont considéré que le mode $\ell=2, k=1$ était la pulsation de période 70.9 s (et non celle à 72.5 s) et leur analyse repose sur cette identification.

Nous avons ensuite choisi de déterminer une ligne de solutions, à T_{eff} et $q(He)$ constantes², dans le plan $\log q(H)$ vs. M_\star (l'intervalle de valeurs pour M_\star étant déterminé par la spectroscopie) pour lesquelles le mode $\ell=2, k=1$ a une période égale à 72.5 s à 1 % près (c'est-à-dire une période comprise entre 71.8 s et 73.2 s) dans la mesure où nous considérons ce mode comme étant le plus central du multiplet partiel. Néanmoins, dans le domaine de périodes concernées, l'effet du *rotational splitting* est infime et même si nous avons choisi l'un des deux autres modes possibles (70.9 s ou 72.5 s), les résultats de la modélisation n'auraient pas été significativement modifiés. Parmi tous les modèles-solutions possibles compris sur cette ligne, nous avons alors cherché à déterminer celui dont les modes calculés s'apparentent le mieux à l'ensemble du spectre observé de G 185-32 (sans tenir compte de l'identification du degré ℓ fourni par l'étude observationnelle de Castanheira et al., 2004 [20]) en évaluant pour chaque modèle la quantité $\sigma = (\Sigma|\delta P|)/n$ (en reprenant les conventions présentées pour l'étude de HL Tau 76).

Ce calcul de σ a permis d'isoler un candidat parmi tous les modèles, dont les modes calculés de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ offraient le meilleur ajustement possible avec les pulsations observées dans le spectre de fréquence de G 185-32.

Nous avons alors voulu affiner la masse du modèle et sa fraction de masse d'hydrogène en faisant légèrement varier ces deux grandeurs (respectivement dans un intervalle de $\pm 0.05 M_\odot$ et $\pm 0.2 \times 10^{-4}$) autour de leur valeur prise initialement pour ce modèle.

Une fois cette évaluation précise terminée, nous avons étudié la variation de la température effective, que nous avons choisie constante et égale à 12130 K en première approche, en lui faisant décrire par pas de 40 K l'ensemble du domaine autorisé par la spectroscopie, en gardant M_\star et $q(H)$ constantes et égales aux valeurs trouvées à l'issue de la détermination fine.

Là encore, la sélection du meilleur candidat final s'est opérée en calculant pour chaque modèle ses modes adiabatiques de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ puis en étudiant pour chacun de ces modèles la valeur de σ et en conservant le modèle pour lequel les modes donnent le plus faible écart-type.

A ce stade, nous disposons du meilleur modèle possible pour représenter G 185-32 dont nous connaissions les modes adiabatiques de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ ainsi que les divers paramètres structuraux.

Il nous a alors été possible d'identifier les différents modes de pulsation compris dans le spectre de PY Vul pour lesquels nous avons également proposé une détermination du nombre azimuthal m après avoir évalué le *rotational splitting* propre à cette étoile à partir des modes que l'observation laisse supposer comme émanant de mêmes multiplets.

Les paramètres stellaires du meilleur modèle ainsi que l'identification des modes du spectre de G 185-32 nous ont alors permis de commenter les résultats de Castanheira et al. (2004) [20], de les compléter, de lever des indéterminations et de soulever des contradictions avec leur précédente étude de cette étoile.

²la T_{eff} a été prise égale à 12130 K et la fraction de masse d'hélium à 10^{-2} car c'est la valeur communément adoptée pour la modélisation des ZZ Ceti et en outre les résultats issus de la modélisation prouveront que c'est effectivement la valeur la plus pertinente.

4.2 Données observationnelles

Avant d'aborder la modélisation de G 185-32, il est nécessaire d'évoquer les données issues de l'observation de cette étoile.

L'ensemble de ces données est exposé par Castanheira et al. (2004) [20] et provient essentiellement de deux campagnes d'observation : la huitième campagne WET (XCOV 8) en 1992 et un ensemble de données HST élaboré en 2000 à partir d'observations réalisées en 1995.

Les différents aspects de ces campagnes et du matériel d'observation ont été minutieusement décrits par Castanheira et al. (2004) [20], c'est pourquoi il ne nous est pas nécessaire de commenter davantage les données d'observation de G 185-32.

Nous retenons la liste complète (19 pulsations) des modes observés dans le spectre de PY Vul, que nous rappelons dans la Table 4-1.

Table 4-1. Modes observés dans le spectre de G 185-32

Fréquence (μHz)	Période (s)
1534.5	651.7
1783.3 (!)	560.8
1860.2 (?)	537.6
2199.9 (?)	454.6
2701.2	370.2
3317.8	301.4
3335.6	299.8
3507.5 (?)	285.1
3757.3	266.2
3785.2	264.2
4635.3	215.7
4698.8	212.8
5497.7	181.9
6736.1 (!)	148.5
7048.8 (*)	141.9
7080.4	141.2
13714.4	72.9
13784.9	72.5
14097.7 (!)	70.9

Dans cette liste, la présence d'un point d'interrogation indique que la pulsation n'a été que marginalement détectée dans les données WET ou HST (ou, pour le mode à 285.1 s, seulement observé par Thompson & Clemens), le point d'exclamation avertit que la fréquence pourrait correspondre à une combinaison linéaire d'autres fréquences et par conséquent ne pas être un vrai mode de pulsation, selon l'analyse de Castanheira et al. (2004) [20].

De plus, Castanheira et al. (2004) [20] ont montré qu'une période (celle à 141.9 s et marquée d'un astérisque dans la Table 4-1) adopte un comportement particulier dans la mesure où son amplitude ne varie pas avec la longueur d'onde, contrairement aux autres. Ils concluent que cette caractéristique incite à penser qu'il s'agit d'un effet non-linéaire donc d'un faux mode. Néanmoins,

notre modélisation de G 185-32 semble indiquer au contraire que c'est vraisemblablement un vrai mode de pulsation. Nous formulerons en outre une hypothèse pour tenter d'expliquer le comportement atypique de l'amplitude de ce mode.

En outre, la pulsation de période 181.9 s est absente des données WET mais présente une amplitude significative dans les relevés de HST (0.43 ± 0.12 mma). Bien que Castanheira et al. (2004) [20] la considèrent comme un vrai mode, la modélisation suggèrera qu'il doit plutôt s'agir d'une combinaison linéaire, ce qui peut rendre compte de son absence lors de la campagne WET. Par ailleurs, les modes à 299.8 s et 301.4 s, 264.2 s et 266.2 s et enfin 72.5 s et 72.9 s ont des périodes suffisamment proches pour pouvoir être considérés *a priori* comme membres issus d'un même multiplet induit par l'effet du *rotational splitting*. C'est pourquoi nous tenterons une détermination du *rotational splitting* inhérent à cette étoile grâce au *frequency shift* associé à certaines de ces paires de modes (car nous montrerons auparavant que quelques périodes sont plus probablement des combinaisons linéaires que de vrais modes de pulsation).

4.3 Détermination du meilleur modèle pour représenter G 185-32

Les caractéristiques du programme de modélisation que nous avons utilisé pour contraindre G 185-32 ont déjà été exposées précédemment (Chapitre 3), c'est pourquoi il n'est pas utile de les répéter dans ce Chapitre.

La stratégie que nous avons suivie pour obtenir le meilleur modèle apte à représenter PY Vul a été brièvement esquissée en introduction. Nous allons à présent expliciter et développer la méthode qui nous a permis de parvenir à ce résultat.

4.3.1 Influence secondaire de la variation de la T_{eff} sur le spectre de pulsation des modèles

Le premier objectif de notre démarche a consisté à contraindre simultanément la masse totale de l'étoile (M_\star) et la masse de son enveloppe extérieure d'hydrogène, $M(H)$, en cherchant des modèles-solutions dans l'intervalle de masse stellaire autorisé par la spectroscopie. Nous avons choisi de négliger en première approche la variation de la fraction de masse d'hélium et celle de la température effective.

Brassard et al. (1992) [14] ont démontré que la détermination de la masse de la couche d'hélium d'une ZZ Ceti par l'astérosismologie est difficile car les modes ne sont que peu sensibles à ce paramètre stellaire. Nous avons ainsi considéré la masse d'hélium de nos modèles constante, égale à $M(He) = 10^{-2} M_\star$, valeur qui est d'ailleurs communément choisie pour modéliser les étoiles DA, et que notre étude confirmera *a posteriori* comme la plus pertinente pour PY Vul.

En ce qui concerne la température effective, notre précédente étude sur HL Tau 76 a montré qu'une variation modérée de T_{eff} n'a qu'un faible impact sur le comportement des modes de pulsation d'un modèle d'étoile ZZ Ceti. Par conséquent, il paraît légitime de considérer la T_{eff} comme dégénérée dans cette première étape de détermination des paramètres structuels de G 185-32. Il nous est néanmoins apparu prudent de vérifier sur un exemple la validité de cette tendance générale, que l'étude de HL Tau 76 avait permis de dégager.

Pour ce faire, nous avons calculé 8 modèles de masse totale très proche de celle de G 185-32 telle qu'estimée par l'observation. Ces modèles présentent comme principales caractéristiques structurales : une masse totale $M_\star = 0.62 M_\odot$, une fraction de masse d'hydrogène $q(H) = 10^{-4}$ et une fraction de masse d'hélium $q(He) = 10^{-2}$.

Nous avons fait varier la température effective en lui faisant décrire l'intervalle spectroscopique (c'est-à-dire variant entre 11930 K et 12330 K) et calculé pour chacun de ces modèles les modes

adiabatiques de degré $\ell=2$ et d'ordre radial $k=1$ puis $k=10$. Nous avons alors pu comparer les périodes de ces 2 modes entre les différents modèles et nous assurer qu'elles ne changent que de façon infime lorsque la T_{eff} varie.

L'évolution de la période des deux modes considérés est présentée dans la Table 4-2.

La Table 4-2 confirme que la variation de la T_{eff} au sein de l'intervalle spectroscopique de G 185-32 influence faiblement le mode $\ell=2, k=10$ alors que le mode $\ell=2, k=1$ est constant et insensible à ce paramètre.

Ceci est très important car, comme nous l'avons rapidement précisé et comme nous allons l'évoquer à nouveau dans la suite, la détermination conjointe de la masse totale M_\star et de la fraction de masse d'hydrogène $q(H)$ s'est effectuée en ne prenant en compte que le mode observé à 72.5 s que nous estimons être le mode $\ell=2, k=1$. Ce dernier étant indifférent à la variation de la T_{eff} , le fait d'avoir considéré ce paramètre comme dégénéré en première approche n'a donc pas pu altérer la pertinence des résultats obtenus.

Table 4-2. Influence de la variation de la T_{eff} sur la période des modes $\ell=2, k=1$ puis $k=10$

Température effective (K)	Période du mode $\ell=2, k=1$ (s)	Période du mode $\ell=2, k=10$ (s)
11950	79.9	379.3
12020	79.9	378.8
12080	79.8	376.9
12150	79.8	373.2
12210	79.8	370.8
12270	79.8	367.3
12320	79.7	365.4

4.3.2 Détermination des modèles-solutions dans le plan $\log q(H)$ vs. M_\star

Nous venons de nous assurer qu'une légère variation de la T_{eff} a un effet suffisamment faible sur les modes de pulsation pour pouvoir être négligée sans risquer de perturber la validité des résultats. D'autre part, les modes ne sont que très peu sensibles à la fraction de masse d'hélium de l'étoile (Brassard et al., 1992) [14]. Nous n'allons donc considérer que les deux paramètres structurels $q(H)$ et M_\star en premier lieu.

Dans le spectre observé de PY Vul, il n'y a qu'un seul mode pour lequel l'ordre radial k et le degré ℓ sont identifiables avec certitude : la période à 72.5 s qui ne peut être que le mode $\ell=2, k=1$ (nous avons décidé de ne pas considérer la période à 70.9 s car Castanheira et al. (2004) [20] avertissent qu'il pourrait s'agir d'un faux mode et la période à 72.9 s nous semble apparentée au mode $\ell=2, k=1$ mais avec un nombre azimuthal m différent, ce qui sera discuté ultérieurement). Nous allons donc faire décrire à M_\star l'intervalle $[0.610 M_\odot, 0.670 M_\odot]$, qui est l'intervalle suggéré par la spectroscopie (d'après Bergeron et al., 1995 [4] & 2004 [5]), par pas de $0.005 M_\odot$, en conservant la T_{eff} constante (et égale à 12130 K) ainsi que la fraction de masse d'hélium invariante et fixée à $q(He) = 10^{-2}$.

La fraction de masse d'hydrogène sera alors ajustée pour chaque modèle de telle sorte que le calcul adiabatique retrouve la période du mode $\ell=2, k=1$ égale à 72.5 s (à 1% près).

Nous avons ensuite cherché à réaliser une identification sommaire des modes observés dans le spectre de G 185-32 à partir des modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ calculés pour chacun de ces 13 modèles. La Table 4-3 résume les paramètres M_\star , $\log q(H)$, le nombre de modes observés identifiés

ainsi que l'écart-type σ pour chaque modèle.

La Table 4-3 montre clairement que le modèle de masse $M_\star = 0.640 M_\odot$ dont l'enveloppe d'hydrogène a une masse $M(H) = 1.62 \times 10^{-4} M_\star$ est celui pour lequel l'accord global avec l'ensemble du spectre observé de G 185-32 est le meilleur (plus faible valeur de σ) et qu'en outre ce modèle est l'un de ceux qui identifient le maximum de modes (13).

On en déduit alors que la masse totale de l'étoile d'une part et celle de son enveloppe d'hydrogène d'autre part doivent être proches de ce couple de valeurs.

Il nous reste par conséquent à achever le processus d'évaluation en effectuant une détermination précise de ces paramètres puis en étudiant la variation de la T_{eff} .

Table 4-3. Modèles-solutions possibles dans le plan $\log q(H)$ vs. M_\star obtenus à partir du mode à 72.5 s à T_{eff} et $q(He)$ constantes

Masse totale M_\star/M_\odot	Fraction de masse d' H $\log q(H)$	Modes identifiés	σ (s)
0.610	-3.62	10	4.8
0.615	-3.66	11	4.5
0.620	-3.74	11	4.2
0.625	-3.72	12	3.9
0.630	-3.74	13	3.4
0.635	-3.76	13	3.0
0.640	-3.79	13	2.8
0.645	-3.82	13	3.1
0.650	-3.86	13	3.3
0.655	-3.88	12	3.6
0.660	-3.91	12	3.8
0.665	-3.95	12	3.8
0.670	-3.96	10	3.7

4.3.3 Détermination précise de M_\star et de $q(H)$. Etude de la T_{eff}

Nous avons constitué une nouvelle grille de modèles, plus fine, en faisant légèrement varier la masse totale des modèles autour de la valeur $M_\star = 0.640 M_\odot$ et ajusté la masse de l'enveloppe d'hydrogène pour chacun d'eux afin de conserver le mode $\ell=2$, $k=1$ calculé dans les modèles de période égale à 72.5 s à 1 % près. La T_{eff} a été maintenue constante et égale à 12130 K.

La meilleure adéquation possible avec le spectre observé de PY Vul s'obtient pour le couple $M_\star = 0.638 (\pm 0.007) M_\odot$ et $q(H) = 1.70 (\pm 0.10) \times 10^{-4}$.

L'incertitude sur M_\star représente la différence de masse totale minimale (à partir de la valeur centrale $0.638 M_\odot$) nécessaire pour augmenter de 10 % l'écart-type σ du modèle résultant et l'incertitude sur $q(H)$ correspond à la variation minimale (à partir de la valeur centrale 1.70×10^{-4}) de la masse d'hydrogène requise pour dépasser le seuil de tolérance de 1 % fixé pour la période du mode de référence, c'est-à-dire pour obtenir un modèle de masse totale $M_\star = 0.638 M_\odot$ pour lequel le mode $\ell=2$, $k=1$ a une période inférieure à 71.8 s ou supérieure à 73.2 s.

On remarque alors que le choix initial pour la masse de la couche d'hélium était le plus judicieux possible. En effet, comme nous l'avons montré lors de l'étude de HL Tau 76, la seule valeur admissible pour $q(He)$ lorsque $q(H)$ avoisine 2×10^{-4} est $q(He) = 10^{-2}$.

Il ne nous reste plus qu'à faire décrire à la température effective l'intervalle délimité par la spectroscopie (entre 11930 K et 12330 K, par pas de 40 K) puis, pour chacun des modèles, évaluer σ et retenir le modèle pour lequel cet écart-type prend la plus faible valeur.

L'influence de la température effective sur le spectre des modèles est mineure. Le calcul de σ indique que le modèle de $T_{eff} = 12280$ K semble être le meilleur possible ; toutefois un écart de 80 K autour de cette température est nécessaire pour provoquer une modification détectable des modes de pulsation. Par conséquent, nous devons considérer que la température effective la plus probable est $T_{eff} = 12280 (\pm 80)$ K. Le modèle ainsi obtenu délivre alors un écart-type $\sigma = 2.7$ s avec une erreur relative moyenne sur les 15 modes identifiés de $|\delta P/P| = 1.0$ %.

La détermination des paramètres structurels est achevée et nous allons à présent étudier les caractéristiques du meilleur modèle retenu à l'issue de notre processus de modélisation.

4.3.4 Caractéristiques du modèle représentant G 185-32

Paramètres structurels

La stratégie que nous avons élaborée pour contraindre G 185-32 à partir des données observationnelles concernant son spectre de pulsation et les valeurs spectroscopiques proposées pour sa masse et sa température effective a mis en évidence un modèle stellaire capable de représenter au mieux cette étoile ZZ Ceti. La modélisation a en effet permis de déterminer la masse totale de l'étoile, la masse de son enveloppe d'hydrogène et celle de sa couche d'hélium (par déduction théorique), sa température effective ainsi que sa luminosité et son rayon stellaire (qui dépendent des grandeurs précédentes). Ces paramètres physiques sont résumés dans la Table 4-4.

Nous avons calculé les modes adiabatiques de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ pour le modèle retenu sur un domaine de périodes couvrant celui des modes observés dans le spectre de l'étoile.

Les périodes des modes de degré $\ell=1$ sont présentées dans la Table 4-5 et celles des modes de degré $\ell=2$ dans la Table 4-6.

Table 4-4. Paramètres du modèle représentant G 185-32

Masse totale	$M_{\star} = 0.638 (\pm 0.007) M_{\odot}$
Température effective	$T_{eff} = 12280 (\pm 80) \text{ K}$
Masse de l'enveloppe d'hydrogène	$M(H) = 1.70 (\pm 0.10) \times 10^{-4} M_{\star}$
Masse de la couche d'hélium	$M(He) = 10^{-2} M_{\star}$
Luminosité	$L = 0.00461 L_{\odot}$
Rayon stellaire	$R = 0.01531 R_{\odot}$

Table 4-5. Modes adiabatiques de degré $\ell=1$ pour le modèle représentant G 185-32

k	période (s)	k	période (s)
1	124.6	7	461.5
2	244.0	8	505.1
3	281.2	9	533.7
4	322.0	10	589.8
5	364.3	11	637.5
6	397.0	12	680.2

Table 4-6. Modes adiabatiques de degré $\ell=2$ pour le modèle représentant G 185-32

k	période (s)	k	période (s)
1	72.0	13	431.5
2	142.1	14	455.2
3	163.4	15	474.2
4	194.3	16	508.8
5	224.2	17	542.1
6	240.1	18	559.6
7	269.3	19	587.6
8	300.7	20	605.0
9	326.4	21	633.8
10	346.2	22	672.3
11	374.2	23	698.6
12	397.0	24	712.2

Spectre adiabatique du modèle

Identification préliminaire des modes du spectre de G 185-32

Les modes de pulsation de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ calculés pour le modèle retenu permettent d'effectuer une première identification préliminaire des modes présents dans le spectre de G 185-32. Nous avons choisi de ne pas tenir compte de l'effet du *rotational splitting* que nous envisagerons par la suite.

La Table 4-7 présente 6 colonnes : la première exprime les périodes observées, la seconde colonne le degré sphérique ℓ du mode, la troisième son ordre radial k , la quatrième colonne la valeur de la période calculée dans le modèle qui lui correspond, la cinquième la différence absolue entre les 2 périodes ($|\delta P|$) et enfin la sixième colonne la différence relative entre les 2 périodes ($|\delta P/P|$). L'écart-type pour cette identification vaut $\sigma = 2.7$ s, l'erreur relative moyenne est de $|\delta P/P| = 1.0\%$. Ces deux données statistiques révèlent une adéquation satisfaisante entre les spectres observé et calculé. Cette identification peut être encore améliorée et complétée si l'on intègre l'effet du *rotational splitting* et si l'on introduit le nombre azimuthal m .

Table 4-7. Identification préliminaire des modes observés dans le spectre de PY Vul

Période observée	degré ℓ	ordre k	Période calculée	$ \delta P $	$ \delta P/P $ (%)
70.9 s	?	?	?	?	?
72.5 s	2	1	72.0 s	0.5 s	0.7
72.9 s	2	1			
141.2 s	2	2			
141.9 s	2	2	142.1 s	0.2 s	0.1
148.5 s	?	?	?	?	?
181.9 s	?	?	?	?	?
212.8 s	2	5			
215.7 s	2	5	224.2 s	8.5 s	3.8
264.2 s	2	7			
266.2 s	2	7	269.3 s	3.1 s	1.2
285.1 s	1	3	281.2 s	3.9 s	1.4
299.8 s	2	8			
301.4 s	2	8	300.7 s	0.7 s	0.2
370.2 s	2	11	374.2 s	4.0 s	1.1
454.6 s	2	14	455.2 s	0.6 s	0.1
537.6 s	1	9	533.7 s	3.9 s	0.7
560.8 s	2	18	559.6 s	1.2 s	0.2
651.7 s	?	?	?	?	?

Combinaisons linéaires mises en évidence par la modélisation

L'identification préliminaire de la Table 4-7 permet de statuer plus clairement à propos des éventuelles combinaisons linéaires présentes dans le spectre de G 185-32. En effet, certaines périodes observées ne peuvent absolument pas être reconnues au moyen des modes adiabatiques calculés pour le modèle retenu.

Tout d'abord, nous envisageons la pulsation de période 141.9 s.

Malgré le comportement marginal de son amplitude qui ne varie pas en fonction de la longueur d'onde (nous proposerons une explication possible de ce phénomène dans la suite de ce Chapitre),

le spectre du modèle présente le mode de degré $\ell=2$, $k=2$ avec une période de 142.1 s, qui permet ainsi de considérer le couple (141.2 s, 141.9 s) comme faisant partie du quintuplet engendré par ce mode sous l'action du *rotational splitting*.

On en déduit que la période de 70.9 s est alors un faux mode (harmonique du mode de période 141.9 s) car : $f_{70.9s} = 2 \times f_{141.9s}$ avec $|\Delta f| = |f_{obs} - f_{comb}| = 0.05 \mu\text{Hz}$.

La période à 148.5 s n'est pas identifiée par la Table 4-7, ce qui confirme l'hypothèse de Castanheira et al. (2004) [20] à savoir qu'il doit s'agir d'une combinaison linéaire de modes parents telle que : $f_{148.5s} = f_{72.5s} - f_{141.9s}$.

A présent, considérons la pulsation de période 181.9 s. Non seulement cette période n'est que marginalement détectée (car seulement présente dans les données HST) mais elle apparaît en outre avec un faible rapport signal/bruit (environ 3.6), proche de la limite de détection fixée par Castanheira et al. (2004) [20] au niveau $3.3 < A >$. Avec un seuil de détection plus élevé (situé à $4 < A >$ par exemple), cette période n'aurait pas été détectée et aurait été considérée comme du bruit. Il n'est par conséquent pas surprenant que le spectre synthétique de notre modèle ne parvienne pas à la reproduire. Cela nous amène à conclure que la période à 181.9 s n'est pas un vrai mode de pulsation.

Nous soulignons par ailleurs que la période à 651.7 s pourrait être également une combinaison linéaire vérifiant la relation $f_{651.7s} = f_{301.4s} - f_{560.8s}$ avec $|\Delta f| = 0.00 \mu\text{Hz}$ (Castanheira et al. [20] notent la possibilité d'une éventuelle combinaison linéaire en mettant en évidence l'égalité $f_{560.8s} = f_{301.4s} - f_{651.7s}$). Certes, la période à 651.7 s n'a pas été reconnue par la Table 4-7 mais, lorsque l'effet du *rotational splitting* est intégré dans la procédure d'identification des modes, cette pulsation devient identifiable à partir du spectre de notre modèle. De plus, si nous examinons les amplitudes des 3 modes concernés dans les 3 ensembles de données disponibles (WET, HST UV et HST visible), nous remarquons que la période à 560.8 s n'est pas détectée par WET (ces données observationnelles partielles suggéreraient alors qu'il y aurait 2 modes réels : ceux de périodes 301.4 s et 651.7 s) ; si les données HST sont prises isolément, la période à 651.7 s peut être vue comme une possible combinaison linéaire (puisque cette pulsation est celle qui a la plus faible amplitude dans l'extrême bleu comme dans l'UV). La compatibilité de ces 2 analyses partielles est alors assurée en considérant que tous les modes sont réels. Puisque ces pulsations sont en outre parfaitement reproduites par le spectre de notre modèle, il est possible d'affirmer que ces 3 modes constituent un exemple de vraie résonance dans le spectre de PY Vul. En outre, le mode de période 301.4 s semble former un multiplet partiel avec celui de période 299.8 s.

La période à 212.8 s mérite également qu'on l'envisage comme une combinaison linéaire.

En effet, la Table 4-7 révèle une identification médiocre pour cette pulsation, qui ne peut pas être approchée par le spectre de notre modèle à moins d'une dizaine de secondes, ce qui suggère qu'il pourrait s'agir en effet d'un faux mode. A première vue, les modes observés dans le spectre de G 185-32 (et convenablement reconnus par le spectre synthétique de notre modèle) ne permettent pas de l'exprimer comme le résultat d'une combinaison linéaire.

Néanmoins, outre le fait qu'il existe le rapport fractionnaire exact surprenant : $f_{212.8s} = \frac{2}{3} \times f_{141.9s}$ (avec $|\Delta f| = 0.40 \mu\text{Hz}$) qui met cette période en dépendance directe avec le mode remarquable à 141.9 s, nous notons un phénomène particulier qui doit être développé.

Les Table 4-5 et Table 4-6 montrent la coïncidence parfaite entre le mode de degré $\ell=1$, $k=6$ et celui de degré $\ell=2$, $k=12$; ces deux modes oscillant à la même période $P = 397.0 \text{ s} (\pm \sim 0.5 \text{ s})$ environ. L'invisibilité de la période découlant de ce battement dans le spectre de G 185-32 peut

s'expliquer par le fait que ces deux pulsations devaient se trouver en situation d'interférence destructive lors des campagnes d'observation. Cette période à ~ 397.0 s, quoique sûrement masquée par interférence destructive lors des observations, peut être toutefois vue comme la représentation de deux modes véritablement excités et donc susceptibles d'intervenir pour former une combinaison linéaire avec un autre mode parent dans le spectre de l'étoile.

Par ailleurs, on remarque que : $f_{212.8s} = f_{454.6s} + f_{\sim 397.0s}$ avec $|\Delta f| \sim 20.0 \mu\text{Hz}$. Cette valeur de $|\Delta f|$ reste compatible avec l'incertitude inhérente à la modélisation de G 185-32 et à l'erreur interne portant sur le calcul des modes du modèle retenu pour représenter l'étoile.

La médiocrité de l'identification de la pulsation à 212.8 s conjuguée à la possibilité de la justifier au moyen d'une combinaison linéaire mettant en jeu le battement que notre modèle prédit à la période de ~ 397.0 s nous incite à la considérer comme une combinaison linéaire.

En conclusion, notre identification préliminaire permet d'exclure les périodes 70.9 s, 148.5 s, 181.9 s et 212.8 s en les considérant comme faux modes dans le spectre observé de G 185-32.

4.4 Etude du *rotational splitting* relatif à G 185-32

4.4.1 Evaluation du *rotational splitting* à partir du spectre de G 185-32

Les modes observés dans le spectre de G 185-32 permettent d'estimer le *rotational splitting* qui affecte l'étoile. En effet, on observe plusieurs paires de modes dont les périodes sont suffisamment proches pour considérer que ces pulsations sont en fait deux membres provenant d'un même multiplet induit par la rotation stellaire. En outre, le calcul des modes adiabatiques de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ (modes de degrés les plus probablement détectables dans le spectre d'une ZZ Ceti) sur un domaine couvrant l'étendue des périodes observées montre, qu'au niveau des périodes de ces couples de modes, il n'y a pas coïncidence (dans le spectre du modèle retenu) de pulsations de degrés ℓ différents donc qu'il ne peut s'agir que d'un même et unique mode démultiplié sous l'action de la rotation stellaire.

Les considérations que nous venons de formuler à propos des faux modes (combinaisons linéaires) probablement présents dans le spectre de G 185-32 permettent de ne retenir comme multiplets partiels probables (et tous de degré $\ell=2$ d'après nos conclusions) que les couples suivants :

A (299.8 s, 301.4 s), **B** (264.2 s, 266.2 s), **C** (141.2 s, 141.9 s) et **D** (72.5 s, 72.9 s).

D'autre part, le domaine des modes observés (courtes périodes, hautes fréquences) n'est pas favorable à une détermination observationnelle précise du *frequency shift*.

Effectivement, le spectre de PY Vul n'offre que des modes de fréquence élevée et la détermination du *rotational splitting*, quoique possible, restera approximative.

En outre, nous devons faire une hypothèse simplificatrice non-démontrable à savoir que la rotation stellaire affecte uniformément les pulsations du spectre quelque soit leur période respective.

En effet, l'étude précédente a suggéré que HL Tau 76 pouvait être, éventuellement, concernée par une rotation non-uniforme et que le *frequency shift* pouvait ne pas être constant et varier en fonction de la fréquence (resp. de la période) du mode. Néanmoins, l'étude que nous avons menée a montré que cette variation était légère et négligeable en première approximation. De plus, comme nous venons de l'évoquer, le domaine couvert par les fréquences du spectre de G 185-32 n'est pas favorable à une détermination précise du *frequency shift* et par conséquent l'éventuelle variation du *frequency shift* avec la fréquence (resp. période) des modes est entièrement neutralisée par l'incertitude observationnelle. Nous pouvons donc évaluer le *rotational splitting* en considérant que le *frequency shift* reste constant sur tout l'intervalle de fréquence couvert par le spectre de PY Vul sans risque d'erreur significative.

4.4.2 Calcul du *rotational splitting*

En vue d'estimer l'effet du *rotational splitting* sur les modes du spectre de G 185-32, nous allons considérer le *frequency shift* qui s'observe au sein des 4 couples de modes de degré $\ell=2$ (**A**, **B**, **C** et **D**) que nous venons de définir.

Pour le couple **A**, on obtient $\Delta f_A = 17.8 \mu\text{Hz}$; pour le couple **B**, $\Delta f_B = 27.9 \mu\text{Hz}$; pour le couple **C** : $\Delta f_C = 31.6 \mu\text{Hz}$ et pour le couple **D** : $\Delta f_D = 70.5 \mu\text{Hz}$.

On sait par ailleurs que : $\Delta f_A = |\Delta m|_A \times \delta f_{\ell=2}$, $\Delta f_B = |\Delta m|_B \times \delta f_{\ell=2}$ et $\Delta f_C = |\Delta m|_C \times \delta f_{\ell=2}$ ³ dans le cadre de l'approximation du régime asymptotique. La limite asymptotique n'est pas vérifiée en revanche pour le couple **D** d'ordre radial trop faible ($k=1$).

Puisque $\Delta f_B \sim \Delta f_C \sim 2 \times \Delta f_A$, on déduit les différentes solutions possibles pour les $|\Delta m|$:

- soit $|\Delta m_A|=1$ et $|\Delta m_B| = |\Delta m_C| = 2$ d'où un *frequency shift* pour les modes de degré $\ell=2$: $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$
- soit $|\Delta m_A|=2$ et $|\Delta m_B| = |\Delta m_C| = 4$ soit un *frequency shift* pour les modes de degré $\ell=2$ tel que : $\delta f_{\ell=2} \sim 8 \mu\text{Hz}$.

Le couple **D** permet de lever l'indétermination. En effet : $|\Delta m_D| = \Delta f_D / \delta f_{\ell=2}$.

Une valeur de $\delta f_{\ell=2}$ voisine de $8 \mu\text{Hz}$ est à exclure car elle conduirait à $|\Delta m_D| \sim 9$ (soit $|\Delta m_D| > 4$). En revanche si l'on envisage la première possibilité avec $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$ alors $|\Delta m_{D\ th}| = 4.4$ ($|\Delta m_{D\ th}|$ désigne la valeur théorique de $|\Delta m_D|$ telle que donnée par l'approximation du régime asymptotique) .

Comme le doublet étudié, d'ordre radial $k=1$, ne vérifie pas les propriétés de la limite asymptotique on a : $C_{1,2\ reel} < C_{1,2\ th}$ donc $|\Delta m_{D\ reel}| < |\Delta m_{D\ th}|$ et on déduit que $|\Delta m_{D\ reel}| = 4$.

Ainsi, il n'y a qu'une seule valeur possible pour le *frequency shift* des modes de degré $\ell=2$ qui vérifie tous les écarts en fréquence des 4 quintuplets partiels observés dans le spectre de G 185-32 : $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$.

4.4.3 Valeur retenue pour le *frequency shift* des modes de degré $\ell=2$. Identification de certains modes et étude de la vitesse de rotation de G 185-32

Les 4 couples de modes que nous avons considérés comme formant des multiplets partiels dans le spectre de G 185-32 nous ont permis de déduire une valeur approximative du *frequency shift* pour les modes de degré $\ell=2$. Cette nouvelle donnée nous permet de poursuivre l'identification des modes et d'estimer la vitesse de rotation de PY Vul.

Compte-tenu que G 185-32 présente des modes de fréquences élevées dans sa Transformée de Fourier, l'évaluation du *frequency shift* est restée approximative. En outre, les multiplets partiels sont trop peu nombreux pour permettre une étude de la variation du *frequency shift* avec la période. Les calculs précédents suggèrent un *frequency shift* pour les modes de degré $\ell=2$ tel que $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$. En outre, en utilisant l'égalité qui relie les *frequency shifts* des modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ dans le cadre du régime asymptotique ($\delta f_{\ell=1} = 0.6 \times \delta f_{\ell=2}$), on déduit que : $\delta f_{\ell=1} \sim 10 \mu\text{Hz}$. La quantité $\delta f_{\ell=1}$ sera utile pour parfaire l'identification des modes observés (détermination du nombre azimuthal m) que notre modèle reconnaît comme étant de degré sphérique $\ell=1$.

³D'après la théorie, la relation induite par le régime asymptotique peut ne pas être satisfaite pour le couple **C** d'ordre radial faible ($k=2$) ; néanmoins l'égalité asymptotique $\Delta f_C = |\Delta m|_C \times \delta f_{\ell=2}$ est étonnamment bien vérifiée.

Cas de la période à 70.9 s

En considérant le couple **D**, la valeur retenue pour $|\Delta m|_D$ ($|\Delta m|_D = 4$) confirme que le mode de période 70.9 s ne peut pas appartenir au quintuplet induit par le mode de degré $\ell=2$ et d'ordre radial $k=1$. En outre, la différence de fréquence entre la période à 70.9 s et la suivante (72.5 s) est de 313 μHz , c'est-à-dire environ 20 fois la valeur de $\delta f_{\ell=2}$. Cela interdit formellement que les 2 périodes (70.9 s et 72.5 s) puissent faire partie d'un même multiplet et renforce l'hypothèse que la pulsation à 70.9 s doit être l'harmonique du mode à 141.9 s ($f_{70.9s} = 2 \times f_{141.9s}$).

Cas du mode à 651.7 s

Le mode de période 651.7 s n'avait pas pu être identifié lors de l'analyse préliminaire du spectre de G 185-32 exprimée dans la Table 4-7. En tenant compte de la valeur déduite pour le *frequency shift* $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$, on peut à présent estimer qu'il s'agit du mode $\ell=2$, $k=21$ et $m=-2$ de période calculée $P=646.9$ s (ce qui induit une erreur relative de 0.7 % seulement), d'après la Table 4-6 qui donne le mode $\ell=2$, $k=21$ (et $m=0$) à 633.8 s. La connaissance de $\delta f_{\ell=2}$ permet donc d'identifier un mode supplémentaire dans le spectre de l'étoile.

Cas des modes de période 299.8 s et 301.4 s

Castanheira et al. (2004) [20] considèrent le couple **A** (299.8 s et 301.4 s) comme constitué de modes de degré $\ell=1$. Notre modélisation offre une identification alternative.

En effet, le spectre de notre modèle ne peut rendre compte de ces deux pulsations voisines de 300 s qu'au moyen du mode de degré $\ell=2$, $k=8$ à 300.7 s et ne peut pas reproduire efficacement ce couple avec des modes de degré $\ell=1$.

En effet, le mode de degré $\ell=1$ le plus proche se situe à une période de 281.2 s (il est d'ordre $k=3$) soit environ 19 s en-deçà, ce qui induirait une erreur relative $|\delta P/P| = 6.2 \%$. En outre le mode de degré $\ell=1$ suivant (de période 322.0 s et d'ordre $k=4$) est également distant de 21 s et suggère une erreur relative de $|\delta P/P| = 7.0 \%$.

On constate alors que le couple (299.8 s, 301.4 s) est équidistant des 2 modes de degré $\ell=1$ et d'ordres consécutifs $k=3$ et $k=4$. Par conséquent il est très difficile de pouvoir le considérer comme se rattachant à l'un des deux modes de degré $\ell=1$ énoncés.

Vitesse de rotation

Le Chapitre 3 a fourni la valeur de $\delta f_{\ell=2}$ pour HL Tau 76 : $\delta f_{\ell=2} = 4.23 \mu\text{Hz}$. Ce même *frequency shift* vaut pour G 185-32 : $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$.

On peut donc par suite estimer que G 185-32 connaît une rotation environ 4 fois plus rapide que HL Tau 76. Sa période de rotation (déterminée à partir de $\delta f_{\ell=2}$) est alors proche de 14.5 h, comparable à celle de G 226-29 (de durée 9 h environ) pour laquelle $\delta f_{\ell=1} = 16.15 \mu\text{Hz}$ (Kepler et al., 1995 [55]).

Table 4-8. Identification complète des modes observés dans le spectre de G 185-32

Période observée	degré ℓ	ordre k	nombre m	Période calculée	$ \delta P $	$ \delta P/P $ (%)
72.5 s	2	1	2	71.8 s	0.7 s	1.0
72.9 s	2	1	-2	72.2 s	0.7 s	1.0
141.2 s	2	2	2	141.5 s	0.3 s	0.2
141.9 s	2	2	0	142.1 s	0.2 s	0.1
215.7 s	2	5	2	222.6 s	6.9 s	3.2
264.2 s	2	7	2	267.0 s	2.8 s	1.1
266.2 s	2	7	0	269.3 s	3.1 s	1.2
285.1 s	1	3	-1	282.0 s	3.1 s	1.1
299.8 s	2	8	1	299.3 s	0.5 s	0.2
301.4 s	2	8	0	300.7 s	0.7 s	0.2
370.2 s	2	11	2	369.8 s	0.4 s	0.1
454.6 s	2	14	0	455.2 s	0.6 s	0.1
537.6 s	1	9	-1	536.6 s	1.0 s	0.2
560.8 s	2	18	0	559.6 s	1.2 s	0.2
651.7 s	2	21	-2	646.9 s	4.8 s	0.7

4.5 Identification complète du spectre observé de G 185-32

L'évaluation, même approximative, du *frequency shift* des modes de degré $\ell=2$ va nous permettre de compléter l'identification partielle de la Table 4-7 en introduisant le nombre azimutal m .

Lorsque des identifications multiples se sont présentées, nous avons adopté les mêmes critères que pour l'étude de HL Tau 76, à savoir que lorsque deux modes de degrés ℓ différents étaient envisageables, nous avons gardé celui qui donnait l'erreur absolue (et relative) la plus faible. Pour les multiplets partiels, nous avons déterminé la valeur de m la plus probable pour chaque membre de sorte que $|\delta P/P|$ reste le plus constant possible pour les 2 modes du couple.

La prise en compte du *rotational splitting* a pour effet d'améliorer la valeur de σ qui vaut à présent $\sigma = 1.8$ s et de diminuer l'erreur relative globale qui s'établit à 0.7 % d'une part et de permettre l'identification d'un mode supplémentaire d'autre part.

La Table 4-8 fournit cette identification.

Les Fig. 4.1 et Fig. 4.2 représentent graphiquement l'appariement des modes observés dans le

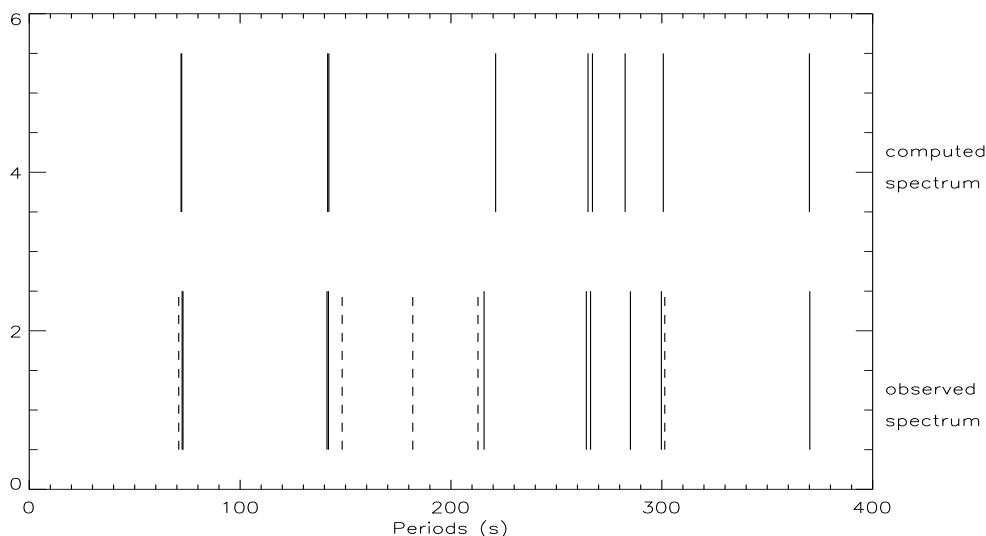


FIG. 4.1 – Spectres observé et calculé pour G 185-32 entre 0 s et 400 s

spectre de PY Vul avec ceux de notre modèle, les faux modes (combinaisons linéaires) étant en pointillés et les vraies pulsations en traits pleins.

4.6 Discussion

4.6.1 Résultats issus de la modélisation

En choisissant une stratégie différente de celle adoptée pour l'étude de HL Tau 76, nous sommes parvenus à une modélisation pertinente de G 185-32 qui nous a permis de contraindre ses principaux paramètres structuraux, d'identifier les modes de pulsation présents dans son spectre de fréquence, en prenant en compte une estimation du *rotational splitting* qui l'affecte et de statuer plus clairement sur la présence de combinaisons linéaires dans son spectre observé. Ces résultats peuvent être confrontés à ceux que Castanheira et al. (2004) [20] avaient précédemment établis dans une étude antérieure de cette étoile en ce sens que notre modélisation vient soit les compléter, soit les confirmer, soit les mettre en doute.

Données nouvelles

En plus des données fournies par l'étude de Castanheira et al. (2004) [20], notre analyse de G 185-32 permet en outre d'obtenir :

- une évaluation très précise de la masse ($M(H) = 1.70(\pm 0.10) \times 10^{-4} M_{\star}$) de son enveloppe d'hydrogène résiduel et par déduction de celle de sa couche d'hélium : $M(He) = 10^{-2} M_{\star}$
- une valeur approchée du *frequency shift* pour les modes de degré $\ell=2$ dans le spectre de cette étoile : $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$
- une identification complète (valeurs ℓ , k et m) des modes observés dans le spectre de l'étoile
- une levée d'indétermination quant à la réalité de pulsations pouvant être soit de vrais modes (vraies résonances) soit des combinaisons linéaires de modes parents dans le spectre
- une confirmation que la pulsation de période 285.1 s obtenue par Thompson & Clemens (2003) mais non retrouvée dans les données WET et HST est un vrai mode de pulsation,

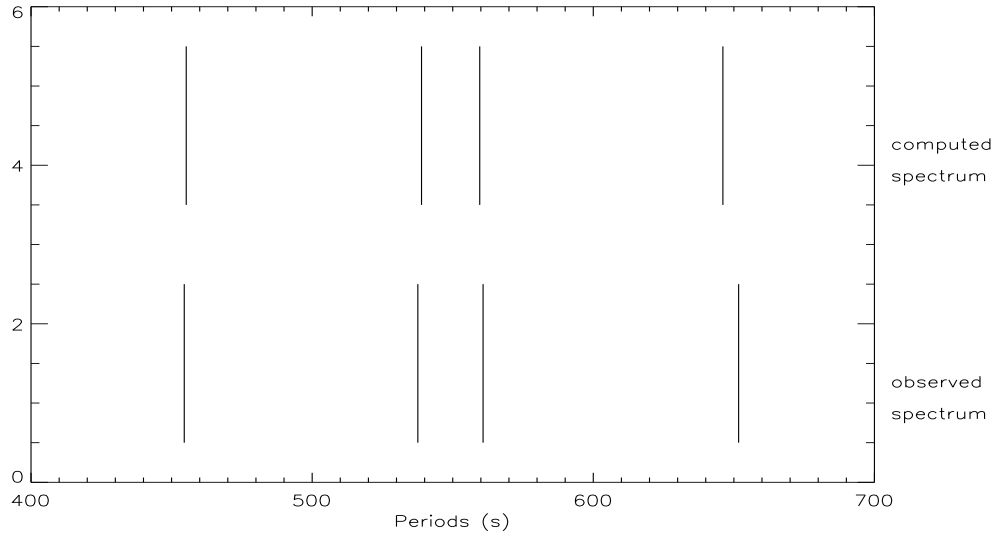


FIG. 4.2 – Spectres observé et calculé pour *G 185-32* entre 400 s et 700 s

que notre modèle présente comme étant de degré $\ell=1$, d'ordre $k=3$ et de nombre⁴ $m=-1$ avec une période calculée de 282.0 s soit une erreur relative de $|\delta P/P|=1.1\%$

- une confirmation que la période de 181.9 s et d'amplitude WET négligeable n'est pas un vrai mode de pulsation mais une combinaison linéaire qui s'est manifestée dans les données HST
- une hypothèse pour expliquer le comportement particulier de l'amplitude de la période à 141.9 s en fonction de la longueur d'onde (voir la discussion ci-après).

Résultats confirmatifs

Notre étude séparée de *G 185-32* retrouve certains résultats énoncés par Castanheira et al. (2004) [20] :

- la masse totale de l'étoile $M_{\star} = 0.638 M_{\odot} (\pm 0.007 M_{\odot})$ contre $M_{\star} = 0.617 M_{\odot} (\pm 0.024 M_{\odot})$ d'après Castanheira et al. (2004) [20] (avec une précision améliorée)
- les modes de plus courtes périodes sont effectivement de degré $\ell=2$ et d'ordre $k=1$
- la période de 148.5 s est une combinaison linéaire.

Résultats contradictoires

Nos conclusions s'opposent parfois à celles de Castanheira et al. (2004) [20] sur les points suivants :

- la température effective de l'étoile que nous estimons à $T_{eff} = 12280 \text{ K} (\pm 80 \text{ K})$ contre $T_{eff} = 11960 \text{ K} (\pm 80 \text{ K})$ selon Castanheira et al. (2004) [20]
- la valeur du degré ℓ de certains modes pour lesquels Castanheira et al. (2004) [20] suggèrent une identification à partir de la variation de leur amplitude avec la longueur d'onde
- la pulsation de période 141.9 s est perçue par notre modélisation comme un vrai mode de pulsation, malgré le comportement particulier de son amplitude en fonction de la longueur d'onde, et non comme un effet non linéaire.

⁴le *frequency shift* des modes de degré $\ell=1$ a été déduit à partir de la relation asymptotique $\delta f_{\ell=1} = 0.6 \times \delta f_{\ell=2}$ soit $\delta f_{\ell=1} \sim 10 \mu\text{Hz}$.

4.6.2 Désaccords sur le degré ℓ des modes du spectre de G 185-32

Castanheira et al. (2004) [20] proposent une identification du degré ℓ pour 15 des pulsations observées dans le spectre de G 185-32 à partir de la variation de leur amplitude respective en fonction de la longueur d'onde.

Pour celles que notre étude retient comme modes réels, nous obtenons une valeur contradictoire du degré ℓ pour certaines d'entre elles. En effet, notre analyse confirme la valeur de ℓ déduite par Castanheira et al. (2004) [20] pour les périodes à 72.5 s, 72.9 s, 215.7 s, 264.2 s, 266.2 s et 651.7 s mais débouche sur une conclusion contradictoire (autre valeur du degré ℓ ou fausseté du mode) pour les périodes à 70.9 s, 148.5 s, 181.9 s, 212.8 s, 299.8 s, 301.4 s, 370.2 s, 454.6 s et 560.8 s.

Toutefois, ces contradictions ne sont pas absolues : la différence (théorique) d'amplitude dans l'UV (données HST) entre les modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ est du même ordre de grandeur que l'incertitude sur la mesure de l'amplitude du mode suivant la longueur d'onde (Castanheira et al., 2004 [20]). Par conséquent, la déduction du degré sphérique ℓ par cette méthode observationnelle est peu sûre et les résultats qu'elle induit ne s'opposent pas catégoriquement à nos conclusions. Il est en outre possible de relativiser quelques identifications conflictuelles dans certains cas.

Cas d'identification équivoque

Les modes de degrés $\ell=1$ (Table 4-5) et $\ell=2$ (Table 4-6) calculés pour notre modèle suggèrent qu'une double identification est possible pour 2 modes dans le spectre observé de G 185-32 : les modes de période 370.2 s et 454.6 s.

Le mode à 370.2 s peut être soit :

- de degré $\ell=2$, d'ordre $k=11$ et de nombre $m=2$ correspondant au mode calculé de période 369.8 s et présentant une erreur relative de $|\delta P/P| = 0.1 \%$
- de degré $\ell=1$, d'ordre $k=5$ et de nombre $m=-1$ correspondant au mode calculé de période 365.6 s et présentant une erreur relative de $|\delta P/P| = 1.2\%$.

Notre critère de sélection implique que l'identification qui débouche sur la plus faible erreur relative soit retenue comme la plus probable, c'est pourquoi nous avons conservé la première possibilité. Toutefois, la seconde alternative présente aussi une erreur relative satisfaisante (quoique plus grande) et une identification du degré ℓ en accord avec celle de Castanheira et al. (2004) [20].

Par ailleurs, le mode à 454.6 s offre pareillement deux choix possibles car il peut être soit :

- de degré $\ell=2$, d'ordre $k=14$ et de nombre $m=0$ correspondant au mode calculé de période 455.2 s et présentant une erreur relative de $|\delta P/P| = 0.1 \%$
- de degré $\ell=1$, d'ordre $k=7$ et de nombre $m=1$ correspondant au mode calculé de période 459.4 s et présentant une erreur relative de $|\delta P/P| = 1.1 \%$.

Ici encore la première solution semble la plus vraisemblable mais la seconde possibilité offre une erreur relative acceptable et une valeur du degré ℓ identique à celle établie par Castanheira et al. (2004) [20] pour ce mode.

Cas du doublet de périodes 212.8 s et 215.7 s

Castanheira et al. (2004) [20] considèrent le mode à 212.8 s comme de degré $\ell=1$ et celui de période 215.7 s comme de degré $\ell=2$.

Néanmoins, la Table 4-7 a révélé que l'ajustement de ces 2 modes était médiocre, spécialement pour le mode de période 212.8 s ($|\delta P| \sim 9$ s et $|\delta P/P| \sim 4$ %) et cette faiblesse contraste avec les autres valeurs de l'erreur absolue et relative ($|\delta P/P| \leq 1.2$ % pour le reste du spectre).

Ceci nous a suggéré que l'une, au moins, de ces deux périodes problématiques pouvait être un faux mode.

En considérant le battement qui, d'après le spectre de notre modèle, doit se produire à une période très proche de 397.0 s (cette période n'étant pas observée dans les données WET ni HST probablement parce qu'en situation de résonance destructive dans les deux cas), nous avons pu considérer la période de 212.8 s comme étant le résultat d'une combinaison linéaire faisant intervenir les périodes à 397.0 s et 454.6 s.

Le fait que le spectre de notre modèle ne puisse efficacement reproduire cette pulsation accrédite l'hypothèse qu'il doit en effet s'agir d'un faux mode de pulsation.

Comme nous pensons qu'il s'agit d'une combinaison linéaire, le degré ℓ que Castanheira et al. (2004) [20] affectent à cette période n'est plus conflictuel car le désaccord n'a plus lieu d'être.

En revanche, la période à 215.7 s ne semble pas pouvoir résulter d'une combinaison linéaire de modes parents. C'est pourquoi nous la retenons comme un vrai mode, sachant que désormais nous pouvons estimer qu'il s'agit du mode de degré $\ell=2$, d'ordre $k=5$ et de nombre azimuthal $m=2$ donc de période calculée 222.6 s, ce qui entraîne une erreur absolue $|\delta P|= 6.9$ s et une erreur relative $|\delta P/P|= 3.2$ %; valeurs plus acceptables qu'en première approche (Table 4-7) mais sensiblement moins satisfaisantes que celles des autres modes du spectre néanmoins. En outre, Castanheira et al. (2004) [20] supposent qu'il s'agit d'un mode de degré $\ell=2$, ce qui est en parfait accord avec notre conclusion.

Cas du doublet de périodes 299.8 s et 301.4 s

Nous avons justifié précédemment pourquoi nous considérons le couple de modes (299.8 s, 301.4 s) comme étant de degré $\ell=2$; nous avons également montré que notre modélisation l'identifie avec une erreur relative très faible, qui vaut $|\delta P/P|= 0.2$ %. Il y a donc conflit pour ce mode entre les conclusions de Castanheira et al. (2004) [20] et notre analyse.

La discussion précédente a permis de montrer que les désaccords véritables à propos de la valeur du degré ℓ des modes du spectre de G 185-32 entre l'étude de Castanheira et al. (2004) [20] et la nôtre ne concernent finalement que le couple de modes à 299.8 s et 301.4 s.

4.6.3 L'énigmatique mode de période 141.9 s

Parmi les nombreuses caractéristiques que présente le spectre de PY Vul, la plus remarquable est certainement la période à 141.9 s dont l'amplitude ne varie pas en fonction de la longueur d'onde, contrairement à ce que la théorie linéaire prévoit pour les modes g de degré $\ell=1$ ou $\ell=2$ (voir Fig. 4.3). Plusieurs scénarios ont été envisagés pour rendre compte de cette singularité.

En effet, Castanheira et al. (2004) [20] estiment que ce comportement atypique est la signature d'un effet non-linéaire et donc que la période à 141.9 s n'est pas un vrai mode de pulsation, ce qui suggère également que celle à 70.9 s serait en revanche un vrai mode; tout ceci allant à l'encontre de nos conclusions. En outre, considérer que la pulsation de période 70.9 s d'une part

et que le couple (72.5 s, 72.9 s) d'autre part sont tous des modes réels est problématique. En effet, si les 3 périodes sont réelles, soient elles appartiennent toutes au même multiplet (induit par la rotation stellaire) ou bien la pulsation à 70.9 s et la paire (72.5 s, 72.9 s) sont des modes distincts et de degrés ℓ différents ($\ell=1$ et $\ell=2$). La valeur déduite pour le *frequency shift* $\delta f_{\ell=2}$ exclut la première possibilité. La différence de fréquence entre la période à 70.9 s et celle à 72.5 s est de loin trop importante pour être compatible avec $\delta f_{\ell=2}$. Comme les périodes à 72.5 s et 72.9 s ont été identifiées (Table 4-8) comme étant de degré $\ell=2$, la pulsation à 70.9 s devrait être de degré $\ell=1$ (et évidemment d'ordre $k=1$) suivant la deuxième hypothèse (si l'on rejette la possibilité d'avoir $\ell \geq 3$ à cause de l'effet de moyenne géométrique). Cette deuxième hypothèse impliquerait que PY Vul aurait une masse proche de la limite de Chandrasekhar puisque seule une étoile aussi massive peut présenter le mode $\ell=1, k=1$ avec une si courte période ; ce qui est en absolue contradiction avec les données observationnelles qui reposent sur la spectroscopie et la parallaxe pour estimer la masse de PY Vul proche de $0.64 M_{\odot}$. En conséquence, l'hypothèse suivant laquelle le mode à 141.9 s serait factice (et par suite celui à 70.9 s réel) apparaît douteuse. Thompson et al. (2004) [82] ne remettent pas en cause l'existence d'un vrai mode de pulsation de période 141.9 s mais le considèrent de degré sphérique $\ell=4$. En effet, le comportement de cette pulsation est en accord avec ce que la théorie prévoit pour les modes de degré $\ell=4$ dont l'amplitude ne varie pas significativement du visible vers l'UV (voir Fig. 4.3). Néanmoins, Thompson et al. (2004) [82] n'ont pas confirmé leur théorie, par exemple en élaborant un modèle de G 185-32 puis en calculant ses modes g non-radiaux afin de vérifier si un mode de degré $\ell=4$ du spectre synthétique pouvait représenter convenablement la période à 141.9 s.

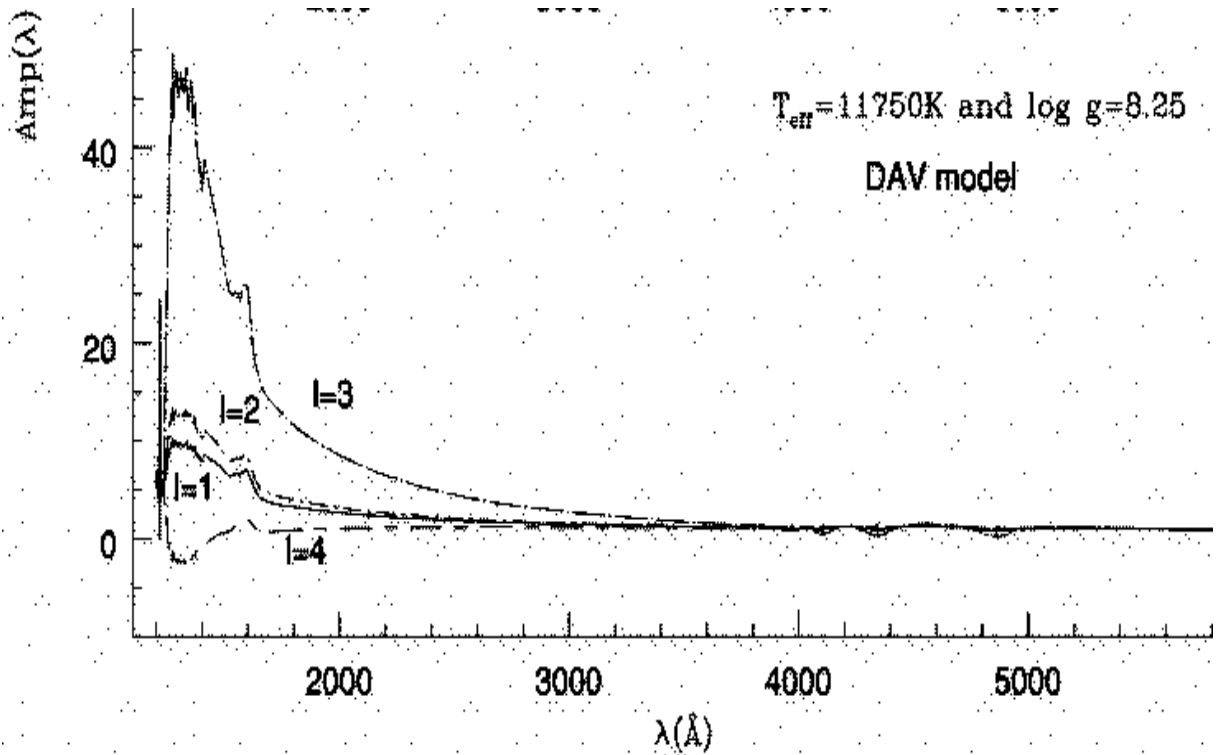


FIG. 4.3 – Variation théorique de l'amplitude des modes g en fonction de la longueur d'onde pour un modèle d'étoile DAV d'après Kepler et al. (2000)

Par ailleurs, il est établi que la visibilité d'un mode décroît quand augmente la valeur de son degré sphérique ℓ (à cause de l'effet de moyenne géométrique). De fait, aucun mode de degré $\ell > 2$ ne semble avoir été détecté jusqu'à présent dans le spectre d'une étoile ZZ Ceti.

De plus, le calcul des modes adiabatiques de degré $\ell=4$ pour notre meilleur modèle ne met pas en évidence de période de pulsation coïncidant précisément avec cette valeur de 141.9 s (le mode $\ell=4, k=5$ a une période de ~ 124.9 s et le mode $\ell=4, k=6$ de ~ 145.6 s). Ces arguments rendent l'hypothèse du mode de degré $\ell=4$ plutôt improbable.

Notre modélisation nous permet de proposer un autre scénario.

En effet, nous avons montré que le mode de degré sphérique $\ell=2$ (et d'ordre radial $k=2$) calculé pour notre modèle a une période de 142.1 s et nous avons par conséquent considéré que la pulsation à 141.9 s dans le spectre de G 185-32 était ce mode $\ell=2, k=2$ (et $m=0$).

Cependant, si cette identification permet de justifier la présence d'une oscillation de période 141.9 s dans le spectre de l'étoile, elle n'explique pas pourquoi la variation de son amplitude en fonction de la longueur d'onde ne vérifie pas le comportement général que la théorie prévoit pour les modes de degré $\ell=2$.

Le calcul des modes de degrés sphériques $\ell=3, \ell=4$ et $\ell=5$ pour notre modèle permet d'envisager le problème sous un angle nouveau. En effet, ce calcul montre que le mode de degré $\ell=3$ et d'ordre $k=4$ a une période de ~ 139.9 s, celui de degré $\ell=4$ et d'ordre $k=6$ une période de ~ 145.6 s et celui de degré $\ell=5$ et d'ordre $k=9$ une période de ~ 143.0 s.

On remarque alors que : $f_{(\sim 139.9s)} + f_{(\sim 145.6s)} = 2 \times f_{(141.9s)}$ avec $|\Delta f| = |f_{(141.9s)} - 0.5 \times (f_{(\sim 139.9s)} + f_{(\sim 145.6s)})| \sim 40 \mu\text{Hz}$ et que : $f_{(\sim 139.9s)} + f_{(\sim 143.0s)} = 2 \times f_{(141.9s)}$ avec $|\Delta f| = |f_{(141.9s)} - 0.5 \times (f_{(\sim 139.9s)} + f_{(\sim 143.0s)})| \sim 20 \mu\text{Hz}$.

Ces deux relations entre fréquences montre que nous sommes en présence de deux vraies résonances possibles, faisant intervenir chacune 3 modes de degrés sphériques différents (respectivement $\ell=2, 3, 4$ pour la première et $\ell=2, 3, 5$ pour la seconde). En outre, la valeur de la différence $|\Delta f|$ n'est pas rédhibitoire car elle peut s'expliquer par l'erreur systématique inhérente à la modélisation, qui ne permet raisonnablement pas d'obtenir une précision sur les périodes calculées inférieure à 0.5 s, cela est d'autant plus vrai pour la deuxième résonance évoquée pour laquelle $|\Delta f|$ est du même ordre de grandeur que la résolution temporelle des données observationnelles venant de HST.

Il est par ailleurs possible que des modes de degré sphérique $\ell \geq 6$ puissent potentiellement satisfaire d'éventuelles relations de vraies résonances impliquant le mode $\ell=2, k=2$ mais ces derniers, de par les très faibles perturbations radiales de pression et de densité qu'ils induisent, ont une probabilité négligeable de pouvoir suffisamment interférer avec le mode central ($\ell=2, k=2$) du triplet résonant pour que le résultat de cette interaction soit détectable dans les données d'observation et de ce fait les deux relations précédentes nous apparaissent comme les seules aptes à justifier une vraie résonance faisant intervenir le mode $\ell=2, k=2$.

Par ailleurs, il n'est pas étonnant de ne pas détecter dans le spectre de G 185-32 les modes de degré $\ell > 2$ impliqués dans la mesure où plus le degré d'un mode augmente et plus sa visibilité diminue. La combinaison linéaire résultante $[f_{\ell=3}(\sim 139.9s) + f_{\ell=4}(\sim 145.6s)]$ ou $[f_{\ell=3}(\sim 139.9s) + f_{\ell=5}(\sim 143.0s)]$ serait elle aussi probablement indétectable si elle ne se conjugait pas avec le mode de degré $\ell=2$ et d'ordre radial $k=2$ qui provoque la résonance observée avec les 2 autres modes de degrés sphériques supérieurs.

C'est ainsi que la période de 141.9 s serait le résultat d'une vraie résonance, coïncidence entre un mode de degré $\ell=2$ et une combinaison linéaire de deux modes parents de degrés sphériques respectifs $\ell=3$ et $\ell=4$ ou $\ell=3$ et $\ell=5$. Ceci expliquerait alors pourquoi l'amplitude de cette pul-

sation ne varie pas en fonction de la longueur d'onde comme le ferait celle d'un mode de degré $\ell=2$ isolé (l'amplitude du mode de degré $\ell=2$ étant significativement perturbée par celle de la combinaison linéaire). L'explication du phénomène peut même aller plus loin.

On peut de plus suspecter que ce triplet de modes résonants pourrait subir le phénomène du *frequency lock* ou, tout au moins, se trouver en régime intermédiaire.

En effet, Goupil et al. (1998) [47] indiquent que, lorsque trois modes de degrés ℓ différents ont des fréquences proches de la résonance telles que $f_1 + f_3 \sim 2 \times f_2$, alors le triplet peut connaître un *frequency lock*.

Ce phénomène se manifeste par le fait que, lorsque les fréquences linéaires sont proches de la résonance, le couplage résonant est effectif et oblige les fréquences des 3 modes à être exactement équidistantes même si elles ne le sont pas dans le cadre de la théorie linéaire (auquel cas les fréquences des modes résonants de degré $\ell > 2$ prendraient en réalité une valeur légèrement différente de celles que notre programme a délivré en suivant la théorie linéaire), cet ajustement des fréquences soumises au *frequency lock* peut s'illustrer en examinant la période du mode de degré $\ell=2$ observé que le calcul linéaire estime à 142.1 s (et que l'on détecte à 141.85 s). Dans ces conditions, $|\Delta f|_{reel} < |\Delta f|_{lin}$ donc $|\Delta f|_{reel} < 40 \mu\text{Hz}$ ou $|\Delta f|_{reel} < 20 \mu\text{Hz}$ respectivement pour les deux résonances potentielles.

Néanmoins, Goupil et Buchler (1994) [46] précisent qu'un tel phénomène de couplage non-linéaire au sein d'un triplet résonant obéit à des règles de sélection qui imposent notamment que la somme des degrés sphériques des modes impliqués doit être paire. Dans la première alternative, la somme des degrés $[(\ell=4) + (\ell=3) + (\ell=2) + (\ell=2)]$ vaut 11 et cette éventuelle vraie résonance n'est pas éligible au couplage non-linéaire. En revanche, la deuxième possibilité, qui induit des modes de degrés respectifs $\ell=2$, $\ell=3$ et $\ell=5$ satisfait la règle de sélection car la somme des degrés est paire et elle vaut 12 $[(\ell=5) + (\ell=3) + (\ell=2) + (\ell=2)]$. Par conséquent, seule la seconde résonance évoquée est apte à induire un couplage non-linéaire pouvant impliquer un *frequency lock* ou une situation de régime intermédiaire. La probabilité de couplage non-linéaire pour ce deuxième cas de figure est d'autant plus élevée que l'écart en fréquence $|\Delta f|$ ($|\Delta f| \sim 20 \mu\text{Hz}$) est faible et les fréquences des 3 modes presque équidistantes : $[f_{(141.9s)} - f_{(\sim 143.0s)}] \sim [f_{(\sim 139.9s)} - f_{(141.9s)}]$. Goupil et al. (1998) [47] ont alors montré que l'amplitude des 3 modes résultant d'un *frequency lock* dépend en particulier du taux de croissance κ des modes et des coefficients de couplage non-linéaire inter-modes.

Il est alors tout à fait possible que la configuration du triplet résonant favorise l'amplitude de la composante centrale à 141.9 s (qui est la seule détectée lors des campagnes d'observation) et également tout à fait naturel que cette amplitude ne varie pas en fonction de la longueur d'onde comme le prédit la théorie linéaire. Néanmoins, pour statuer plus clairement sur cette hypothèse, il faudrait évaluer le taux de croissance des modes concernés en faisant usage d'un programme de calcul de modes de pulsation non-adiabatique puis s'assurer que la valeur obtenue pour κ est compatible avec la condition de réalisation du *frequency lock* ($\kappa \geq 2\pi\Delta f$) ou du régime intermédiaire ($\kappa \leq 2\pi\Delta f$).

4.7 Conclusion

L'étude de la ZZ Ceti G 185-32 nous a permis de conjuguer à nouveau les techniques issues de l'astérosismologie et de la modélisation afin de contraindre plus précisément les paramètres structuraux de cette étoile DAV, d'identifier les modes observés dans son spectre, d'évaluer l'effet du *rotational splitting* sur les pulsations de cette étoile, de lever l'indétermination quant à la réalité de certaines périodes qui pouvaient être aussi bien considérées comme vrais modes de pulsation ou comme combinaisons linéaires de modes parents ; enfin de proposer une nouvelle

hypothèse pour tenter d'expliquer la particularité du mode de période 141.9 s dont l'amplitude ne varie pas en fonction de la longueur d'onde comme la théorie le prévoit.

4.7.1 Modélisation de G 185-32

En suivant une méthode différente de la stratégie employée pour contraindre HL Tau 76, qui a reposé ici sur un mode de référence observé dans le spectre de PY Vul et sur les valeurs de la gravité de surface (et donc de la masse totale) ainsi que de la température effective de l'étoile déduites de la spectroscopie, nous avons isolé un modèle dont les modes calculés pour les degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ s'ajustent au spectre observé de G 185-32 avec une erreur relative moyenne de 0.7 %. Les caractéristiques structurelles essentielles de ce modèle font apparaître une masse totale de $0.638 (\pm 0.007) M_{\odot}$ pour G 185-32, une masse $M(H) = 1.70 (\pm 0.10) \times 10^{-4} M_{\star}$ pour son enveloppe d'hydrogène ainsi qu'une T_{eff} de $12280 (\pm 80)$ K. Ces valeurs montrent que PY Vul est située sur le bord bleu de la bande d'instabilité des ZZ Ceti et qu'en outre sa teneur en hydrogène est extrêmement proche de celle dérivée pour HL Tau 76.

4.7.2 Estimation de l'effet du *rotational splitting* sur les modes de G 185-32

Les modes de degrés sphériques $\ell=1$ et $\ell=2$ calculés pour notre modèle ont permis de procéder à une identification préliminaire des pulsations du spectre de G 185-32 et de confirmer la présence de multiplets partiels au sein de celui-ci, caractérisés par des pulsations de périodes très voisines. Ces couples de périodes nous ont conduits à évaluer le *frequency shift* des modes de degré $\ell=2$ dans le cadre du régime asymptotique pour PY Vul ($\delta f_{\ell=2} = 16 \mu\text{Hz}$) et ainsi d'estimer que cette étoile doit subir une rotation approximativement 3 à 4 fois plus rapide que celle de HL Tau 76. Par ailleurs, la connaissance de $\delta f_{\ell=2}$ nous a amenés à poursuivre l'identification des modes du spectre observé de G 185-32 en prenant en compte le nombre azimuthal m .

4.7.3 Discussion

Les résultats issus de notre modélisation ont pu être mis en relation avec ceux établis précédemment à propos de cette étoile.

Combinaisons linéaires dans le spectre de PY Vul

Le calcul des modes adiabatiques de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ pour le modèle que nous avons retenu pour représenter PY Vul permet de réduire l'incertitude qui affecte la réalité de certaines pulsations dans le spectre de l'étoile. On peut en effet mettre en doute certaines périodes et supposer que ce sont des faux modes, en particulier lorsqu'elles ne sont que marginalement détectées (comme, par exemple, celle à 181.9 s) ou lorsque leur fréquence correspond parfaitement au résultat d'une combinaison linéaire faisant intervenir d'autres pulsations considérées comme modes parents (par exemple, celle à 651.7 s telle que : $f_{651.7s} = f_{301.4s} - f_{560.8s}$). La modélisation laisse apparaître les périodes de 70.9 s, 148.5 s, 181.9 s et 212.8 s comme faux modes de pulsation.

Désaccords sur la valeur du degré sphérique de certains modes

Castanheira et al. (2004) [20] ont assigné une valeur au degré ℓ de certains modes présents dans le spectre de PY Vul à partir de la variation de leur amplitude en fonction de la longueur d'onde.

Notre analyse ne tombe véritablement en désaccord avec ces attributions que pour quelques rares

pulsations : la période à 212.8 s que Castanheira et al. (2004) [20] estiment être de degré $\ell=1$ mais que notre étude invite à considérer comme le résultat d’une combinaison linéaire faisant intervenir un battement entre 2 modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ à ~ 397.0 s (probablement en interférence destructive lors des campagnes d’observation), le couple (299.8 s, 301.4 s) auquel Castanheira et al. (2004) [20] attribuent un degré $\ell=1$ mais que notre modélisation justifie au moyen d’un mode de degré $\ell=2$, les modes à 370.2 s et 454.6 s pour lesquels le désaccord est faible : Castanheira et al. (2004) [20] concluent qu’ils sont de degré $\ell=1$ alors que le spectre de pulsation calculé pour notre modèle peut aussi bien les représenter par des modes de degré $\ell=1$ que de degré $\ell=2$, en favorisant cependant les modes de degré $\ell=2$ car ils offrent une erreur relative légèrement plus faible.

On peut enfin noter que G 185-32 pulse préférentiellement suivant les modes de degré $\ell=2$ d’après notre modélisation.

Le mode de période 141.9 s

La pulsation de période 141.9 s est probablement l’élément le plus remarquable du spectre de PY Vul dans la mesure où cette période est la seule dont l’amplitude ne varie pas en fonction de la longueur d’onde comme le prévoit la théorie.

Pour rendre compte de ce comportement particulier, Castanheira et al. (2004) [20] ont avancé que cette période n’est pas un vrai mode de pulsation mais résulte d’un effet non-linéaire, ce qui sous-entend également que la pulsation à 70.9 s est en revanche un vrai mode.

Thompson et al. (2004) [82] tentent de justifier cette singularité en supposant que cette période est un vrai mode de pulsation mais de degré $\ell=4$, car le comportement de son amplitude, aussi bien dans le domaine visible que dans l’UV, est en accord avec ce que la théorie prévoit pour un mode de degré sphérique $\ell=4$.

Notre modélisation suggère un troisième scénario : la période à 141.9 s serait le résultat de la superposition d’un vrai mode de pulsation de degré $\ell=2$ (et d’ordre $k=2$) et de la combinaison linéaire de 2 modes parents de degrés respectifs $\ell=3$ et $\ell=4$ ou $\ell=3$ et $\ell=5$ (phénomène de vraie résonance), la deuxième association étant la plus probable.

Dans ces conditions, l’amplitude du vrai mode de degré $\ell=2$ serait perturbée par celle de la combinaison linéaire qui s’y juxtapose. Par conséquent, il est normal que l’amplitude de la période résultante n’obéisse pas aux prédictions théoriques formulées pour un mode isolé et non perturbé.

En outre, ce triplet résonant pourrait connaître un *frequency lock* ou se trouver en régime intermédiaire (phénomène envisageable seulement pour la vraie résonance mettant en jeu les modes de degrés $\ell=2, 3$ et 5 du fait des contraintes des règles de sélection), ce qui aurait également pour conséquence d’éloigner l’amplitude du mode central observé de son comportement prédit par la théorie linéaire.

Notre étude montre ainsi qu’une nouvelle analyse de G 185-32, mettant en oeuvre l’astérosismologie et la modélisation, a non seulement permis de mieux contraindre les paramètres structurels de cette étoile et d’identifier les modes de son spectre de pulsation avec plus de certitude (en mettant en évidence les faux modes résultant de combinaisons linéaires de modes parents) mais a également suggéré un scénario nouveau pour tenter d’expliquer le comportement marginal de l’amplitude de la pulsation de période 141.9 s.

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Bilan

Le travail réalisé au cours de cette thèse s’est inscrit dans la lignée des activités menées au sein du Laboratoire d’Astrophysique de Toulouse dans le domaine de la physique stellaire et tout particulièrement dans celui dévolu à l’astérosismologie.

Le but de cette thèse a été de mettre en oeuvre les techniques héritées de l’astérosismologie pour les appliquer à la modélisation des étoiles naines blanches variables ZZ Ceti.

L’astérosismologie permet en théorie de déduire les principaux paramètres structuraux d’une étoile variable (masse totale, masse de son enveloppe externe d’**H** ou d’**He** pour les DAV ou les DBV, température effective, rayon, luminosité ...) à partir des fréquences d’oscillation présentes dans son spectre de pulsation. Cette détermination peut reposer soit sur l’observation exclusive (étude du *period spacing* entre modes consécutifs observés dans le spectre) soit sur l’association de l’observation avec la modélisation (comparaison par la méthode directe du spectre observé avec le spectre synthétique calculé pour des modèles réalistes censés représenter l’étoile variable). Les méthodes astérosismologiques ont été appliquées avec succès sur les étoiles pré-naines blanches de type PG 1159 et sur les naines blanches DBV. En revanche, ces outils se sont avérés jusqu’alors moins performants pour l’étude des ZZ Ceti, principalement à cause du faible nombre de modes détectés dans les spectres de ces étoiles, en comparaison de ceux que l’on observe dans les riches spectres de naines blanches variables plus chaudes. Cependant, les spectres de quelques étoiles ZZ Ceti présentent suffisamment de modes pour pouvoir être étudiés au moyen de l’astérosismologie. Cette analyse ne peut pas se baser exclusivement sur les observations (car trop de modes y sont absents pour autoriser l’étude directe du *period spacing*) mais doit reposer sur une modélisation bâtie à partir des données observationnelles disponibles pour ces étoiles. Notre travail s’est assigné cet objectif.

Dans un premier temps, nous avons étudié en détail le formalisme des pulsations non radiales au sein des environnements stellaires afin de comprendre les mécanismes que l’investigation astérosismologique met en oeuvre. Nous avons ensuite travaillé sur un programme de modélisation présent au sein du LAT dont nous avons rendue possible l’utilisation dans l’espace des paramètres occupé par les ZZ Ceti (vérification et modification du paramétrage interne, mise à jour des tables d’opacité, optimisation de sous-programmes ...). Nous avons également enrichi ce code de calcul en lui ajoutant des fonctionnalités supplémentaires comme le calcul de l’énergie cinétique des modes de pulsation, leur représentation graphique, le tracé des composantes radiale et tangentielle des fonctions propres des modes. Nous l’avons également doté d’un sous-programme corrolaire qui permet, dans une grille de modèles donnée, de sélectionner le meilleur candidat apte à représenter une étoile ZZ Ceti en utilisant un algorithme basé sur une loi du χ^2 .

Il nous a alors été loisible de mettre à profit ce programme enrichi et amélioré afin de contraindre par l'astérosismologie deux étoiles ZZ Ceti : HL Tau 76 (située sur le bord rouge de la bande d'instabilité) et G 185-32 (située sur le bord bleu). La modélisation de ces 2 étoiles a permis de connaître leurs paramètres structuraux avec une précision améliorée par rapport à ce qu'offre la spectroscopie, d'identifier précisément les modes présents dans leur spectre, de statuer sur la nature de certaines périodes de pulsation que l'observation présentait comme d'éventuelles combinaisons linéaires et enfin de formuler des hypothèses pouvant justifier les particularités propres à ces deux étoiles.

5.2 HL Tau 76 et G 185-32

HL Tau 76

HL Tau 76 a été la première étoile DAV à être observée, sa masse totale et sa température effective ont été évaluées par la spectroscopie et son spectre de pulsation est étonnamment riche pour une étoile ZZ Ceti. Les conditions sont donc réunies pour entreprendre une modélisation satisfaisante de l'étoile au moyen de l'astérosismologie.

Nous sommes parvenus à l'aide d'un algorithme de sélection à isoler un modèle pour représenter cette étoile. L'obtention de ce meilleur candidat a permis de contraindre en particulier sa masse avec une plus grande précision : $M_{\star} = 0.575 (\pm 0.005) M_{\odot}$ contre $M_{\star} = 0.55 (\pm 0.03) M_{\odot}$ par la spectroscopie et sa température effective : $T_{eff} = 11375 (\pm 30) \text{ K}$ contre $T_{eff} = 11450 (\pm 200) \text{ K}$ avec la spectroscopie.

Nous avons de même évalué la masse de son enveloppe d'hydrogène que seule l'astérosismologie permet de connaître avec pareille exactitude : $M(H) = 2.35 (\pm 0.10) \times 10^{-4} M_{\star}$.

En prenant en compte l'effet du *rotational splitting*, la comparaison du spectre observé de HL Tau 76 avec les modes de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ calculés pour notre modèle a permis d'identifier (c'est-à-dire de déterminer la valeur du degré sphérique ℓ , de l'ordre radial k et du nombre azimuthal m) les nombreuses fréquences présentes dans le spectre de l'étoile.

Cette identification a mis en évidence la présence de 36 modes distincts et s'est vue attribuer une erreur relative moyenne de 0.7 % et un écart-type de 4.35 s.

L'analyse approfondie des différents résultats issus de la modélisation a permis de supposer que la rotation de HL Tau 76 pouvait être non-uniforme (ce qui se traduirait par la variation du *rotational splitting* avec la période des modes). Toutefois, l'effet du *rotational splitting* a été évalué pour des modes d'ordres radiaux k élevés dans le cadre de la limite asymptotique et généralisé à l'ensemble du spectre observé de HL Tau 76. La diminution de la qualité de l'ajustement entre les périodes calculées et observées avec la réduction de la durée des périodes observées (donc avec la diminution de l'ordre radial k des modes respectifs) peut également s'expliquer par le fait que les relations du régime asymptotique ne sont plus vérifiées pour les modes de faible ordre radial; ce qui par conséquent pourrait aussi justifier la dégradation constatée de la qualité de l'adéquation entre les modes calculés et observés pour les courtes périodes. Par conséquent, attribuer la variation du *rotational splitting* avec la période des modes à une rotation différentielle de l'étoile est une hypothèse qui doit demeurer spéculative.

Compte-tenu de sa T_{eff} qui la place sur le bord rouge de la bande d'instabilité des ZZ Ceti, le spectre de HL Tau 76 peut aussi rendre compte de l'effet perturbateur qu'opère la convection sur le comportement des modes g tel que prévu par la théorie linéaire.

G 185-32

L'étoile G 185-32 (ou PY Vul) a été identifiée comme ZZ Ceti en 1981. Elle compte parmi les étoiles DA les plus brillantes connues à ce jour et son spectre de pulsation présente des caractéristiques remarquables. En particulier, les fréquences issues de son spectre ont de très faibles amplitudes, qui souvent varient significativement d'une campagne d'observation sur l'autre, et leur analyse observationnelle met en évidence trois aspects importants :

- le spectre de PY Vul exhibe la plus courte période d'oscillation détectée jusqu'à présent
- la valeur de quelques fréquences apparaît comme le résultat exact d'une combinaison linéaire impliquant d'autres fréquences présentes dans le spectre, ce qui met fortement en doute la réalité de certaines d'entre elles
- l'amplitude de la période à 141.9 s adopte un comportement inhabituel : sa variation avec la longueur d'onde n'est pas en accord avec les prédictions théoriques.

Par ailleurs, la température effective et la masse totale de cette étoile sont connues avec une bonne précision grâce aux mesures spectroscopiques.

Ce contexte non seulement suggère la réalisation d'une modélisation de G 185-32 mais il est de plus favorable à une analyse de cette étoile au moyen de l'astérosismologie.

PY Vul a déjà été étudiée auparavant et notre investigation est venue confirmer certains résultats, en mettre d'autres en doute et apporter un regard nouveau sur l'énigmatique mode à 141.9 s.

La stratégie de modélisation que nous avons choisie de suivre pour aboutir à un modèle représentant fidèlement l'étoile a été différente de celle que nous avons adoptée pour l'étude de HL Tau 76. Nous avons ici préféré considérer un mode de référence dont l'identification du degré ℓ et de l'ordre k était certaine. A partir de ce mode et des données spectroscopiques, nous avons procédé à l'élaboration d'une grille de modèles qui a débouché sur un meilleur candidat dont les paramètres structurels et le calcul des modes adiabatiques ont été mis à profit pour mieux contraindre l'étoile. Comme pour HL Tau 76, la modélisation a rendu plus précise la connaissance de la masse totale et de la T_{eff} de l'étoile : $M_\star = 0.638 (\pm 0.007) M_\odot$ contre $M_\star = 0.64 (\pm 0.03) M_\odot$ par la spectroscopie, ainsi que sa température effective : $T_{eff} = 12280 (\pm 80) \text{ K}$ contre $T_{eff} = 12130 (\pm 200) \text{ K}$ avec la spectroscopie.

Le modèle a également donné accès à certains paramètres structurels que la seule observation ne peut évaluer, dont le plus important est la masse de l'enveloppe d'hydrogène résiduel :

$$M(H) = 1.70 (\pm 0.10) \times 10^{-4} M_\star.$$

Les modes du modèle retenu s'ajustent au spectre observé de G 185-32 avec une erreur relative de 1.0 % et un écart-type $\sigma = 2.7 \text{ s}$. L'identification des modes présents dans le spectre de PY Vul à l'aide de ceux calculés pour notre modèle a permis de clarifier la nature de certaines pulsations (vrais ou faux modes) que l'observation suggérait comme possibles combinaisons linéaires. Cette identification a en outre mis en évidence la présence de multiplets partiels induits par la rotation stellaire, qui ont rendu possible l'évaluation du *rotational splitting* qui affecte cette étoile.

Par l'estimation du *frequency shift* pour les modes de degré $\ell=2$ ($\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$), nous avons pu introduire le nombre azimuthal m dans l'identification des modes du spectre de G 185-32 et déterminer la période de rotation de PY Vul, approximativement égale à 14.5 h, durée comparable à celle qui concerne G 226-29 (pour laquelle $\delta f_{\ell=1} = 16.15 \mu\text{Hz}$ avec une période de rotation d'environ 9h).

Enfin, cette modélisation a mis en évidence par le calcul des modes adiabatiques de degrés $\ell=1$ et $\ell=2$ (mais aussi $\ell=3$, $\ell=4$ et $\ell=5$) que :

- 2 modes de degrés sphériques différents ont la même période : $397 (\pm \sim 0.5)$ s et que ce battement semble impliqué comme mode parent d’une combinaison linéaire présente dans le spectre de l’étoile à la période 212.8 s ; ce battement (de période ~ 397.0 s) est absent des données car probablement en situation d’interférence destructive lors des campagnes d’observation
- le mode (identifié comme de degré $\ell=2$ et d’ordre $k=2$) de période 141.9 s semble impliqué dans une vraie résonance mettant également en oeuvre soit un mode de degré $\ell=3$ et un mode de degré $\ell=4$ ou bien le même mode de degré $\ell=3$ et un autre de degré $\ell=5$, si bien que son amplitude naturelle se superpose à celle résultant de la combinaison linéaire des 2 modes de degrés sphériques supérieurs ; cela pourrait ainsi justifier le comportement particulier de l’amplitude de la pulsation détectée à cette période, qui ne varie pas en fonction de la longueur d’onde comme la théorie le prédit pour un mode isolé et non résonant. On peut en outre suspecter que ce triplet résonant serait soumis à un couplage inter-modes (uniquement dans le cas de la résonance qui associerait le mode de degré $\ell=2$ à ceux de degrés $\ell=3$ et $\ell=5$ à cause de règles de sélection portant sur la parité de la somme des degrés sphériques impliqués dans la résonance) conduisant au *frequency lock* ou tout au moins à une situation de régime intermédiaire, phénomènes non-linéaires qui perturbent aussi bien l’amplitude que la période des 3 modes concernés. Ces interactions inter-modes non-linéaires pourraient aussi expliquer l’évolution singulière de l’amplitude de ce mode à 141.9 s en fonction de la longueur d’onde.

L’étude astérosismologique menée sur HL Tau 76 et G 185-32 a en outre fait ressortir deux caractéristiques communes à ces deux étoiles ZZ Ceti :

- les deux naines blanches ont en première approximation la même fraction de masse d’hydrogène : $q(H) \sim 2 \times 10^{-4}$. Ayant également à peu près la même masse : $0.60 (\pm 0.03) M_{\odot}$, HL Tau 76 (de T_{eff} 900 K inférieure à celle de G 185-32) est par conséquent la plus âgée des deux
- dans les spectres des deux étoiles, les modes de degré $\ell=2$ sont préférentiellement observés.

5.3 Perspectives

L’objectif que cette thèse s’est assigné a été de démontrer d’une part dans quelle mesure les techniques astérosismologiques permettent d’accéder à une connaissance plus complète et plus précise de la structure interne des étoiles naines blanches variables ZZ Ceti et d’autre part comment l’astérosismologie peut aider à mieux appréhender les mécanismes d’évolution stellaire et servir à la datation de la Galaxie.

En effet, l’étude de deux ZZ Ceti, HL Tau 76 (située sur le bord rouge de la bande d’instabilité) et PY Vul (située sur le bord bleu), a révélé qu’une approche astérosismologique reposant sur l’observation et la modélisation pouvait améliorer la mesure de la masse totale et de la température effective d’une naine blanche variable, que la spectroscopie permettait déjà d’approcher avec une bonne précision. La modélisation a en outre permis de connaître des paramètres structurels

inaccessibles ou difficilement mesurables par l'observation, comme la fraction de masse d'hydrogène ou d'hélium de l'étoile ; la fraction de masse d'hydrogène étant d'un intérêt capital pour la cosmochronologie et la compréhension de l'évolution stellaire.

Les résultats obtenus pour HL Tau 76 et G 185-32 sont encourageants et prometteurs.

En effet, les deux étoiles ont une enveloppe d'hydrogène de masse à peu près identique :

$M(H) \simeq 2 (\pm \sim 0.3) \times 10^{-4} M_{\star}$. Cette tendance demande à être confirmée sur un plus vaste échantillon de naines blanches DAV.

Si elle se vérifie sur un grand nombre d'étoiles, il sera alors possible d'en tirer profit pour calibrer les modèles évolutifs de naines blanches avec la fonction de luminosité. En particulier, une telle généralisation sous-entendrait que deux étoiles DA de même T_{eff} et de même masse totale ont approximativement le même âge (l'incertitude sur l'âge étant proportionnelle à la dispersion sur la valeur de la masse de l'enveloppe d'hydrogène). Ainsi, une voie serait ouverte au développement des techniques de la cosmochronologie.

Par ailleurs, une possible constance de la masse de l'enveloppe d'hydrogène résiduel au sein de la classe des étoiles DA apporterait des contraintes supplémentaires pour mieux appréhender les phénomènes complexes et encore mal connus qui accompagnent l'évolution d'une étoile de masse faible ou intermédiaire entre le stade de Noyau de Nébuleuse Planétaire et celui de Naine Blanche DA.

Par quel(s) mécanisme(s) de perte de masse des progéniteurs de masse initiale très variable parviennent-ils à évoluer pour se stabiliser autour d'un profil plus ou moins standard de naine blanche DA de masse totale d'environ $0.6 M_{\odot}$ et de fraction de masse d'hydrogène d'environ $q(H) = 2 \times 10^{-4}$?

Pourquoi la masse d'hydrogène résiduel s'établit-elle autour de cette valeur de $2 \times 10^{-4} M_{\star}$?

D'autres perspectives s'ouvrent à la suite de ce travail.

Elles concernent tout d'abord la probable interaction qui doit s'opérer entre la convection et les modes de gravité. Les étoiles DAV, et tout particulièrement celles situées sur le bord rouge de la bande d'instabilité comme HL Tau 76, apparaissent comme les meilleures candidates pour cette investigation car la convection joue un rôle de plus en plus important au fur et à mesure qu'une étoile se refroidit. L'analyse faite sur HL Tau 76 a montré que la qualité de l'ajustement entre les modes observés dans le spectre de la ZZ Ceti et ceux calculés pour notre meilleur modèle était généralement fonction de l'amplitude des modes, les modes de plus grande amplitude étant en principe les plus aptes à interagir sensiblement avec la convection. La convection semblerait avoir pour effet principal de perturber le comportement idéal d'un mode g tel que la théorie linéaire le prévoit, cette perturbation pourrait modifier légèrement sa période d'oscillation si bien qu'un mode de degré $\ell=1$ non perturbé par la convection pourrait, sous son action, voir sa période évoluer et se rapprocher de celle d'un mode de degré $\ell=2$ (non soumis à l'action de la convection). Comme nos modèles ne peuvent pas intégrer ce probable phénomène perturbateur lié à la convection, une telle altération des périodes des modes (due à l'interaction convection/pulsation) pourrait être une source d'erreur lors de l'identification des modes d'un spectre d'étoile DAV de T_{eff} proche du bord rouge de la bande d'instabilité. Il serait par conséquent fortement utile d'étudier et de mieux comprendre l'interaction qui doit exister entre la convection et les pulsations non-radiales afin d'améliorer le calcul des spectres théoriques pour les modèles de ZZ Ceti froides.

Une autre continuation possible de ce travail peut se faire dans le cadre de l'étude de la rotation non-uniforme qui pourrait affecter un certain nombre d'étoiles variables. La rotation non-uniforme se manifesterait observationnellement par un *rotational splitting* variant avec la période

des pulsations du spectre. La mise en évidence observationnelle d'un *rotational splitting* variable nécessite la présence d'un très grand nombre de multiplets dans le spectre de l'étoile, répartis uniformément sur tout le domaine des périodes observées ; ce contexte idéal est peu réaliste car les spectres d'étoiles DAV exhibent généralement trop peu de modes pour réaliser cette condition. La modélisation peut passer outre cette déficience. Comme nous l'avons montré avec HL Tau 76, une éventuelle rotation non-uniforme peut se révéler si la précision de l'ajustement entre modes observés et calculés (traduite par la valeur de l'erreur relative $|\delta P|$) varie qualitativement en fonction de la durée de la période des modes. Pour HL Tau 76, les modes de courtes périodes étaient globalement moins bien identifiés ($|\overline{\delta P}| \sim 1.1\%$) que ceux de longues périodes ($|\overline{\delta P}| \sim 0.4\%$). Une telle tendance peut suggérer que la rotation qui affecte HL Tau 76 n'est pas uniforme. Toutefois, l'analyse que nous avons faite a reposé sur l'hypothèse d'un *frequency shift* constant quelque soit la période (et donc l'ordre k) des modes. La valeur du *frequency shift* a été évaluée à partir de multiplets d'ordres radiaux élevés grâce aux relations du régime asymptotique. Or, pour les modes de faible ordre radial (donc de courte période), la limite asymptotique n'est pas nécessairement valide et par conséquent le *frequency shift* réel qui concerne les modes de courtes périodes peut sensiblement différer de celui qui se rapporte aux modes de longues périodes. De ce fait, la variation qualitative de $|\delta P|$ avec la période des modes n'est pas nécessairement ni exclusivement imputable à une rotation différentielle.

Afin de pouvoir conclure, il serait nécessaire d'élaborer un programme de calcul du coefficient $C_{k,\ell}$ pour estimer numériquement le *frequency shift* de chaque mode de pulsation du spectre du modèle et pouvoir ainsi s'affranchir des incertitudes induites par l'hypothèse simplificatrice d'un *frequency shift* constant (tel que déduit dans le cadre du régime asymptotique).

Enfin, l'étude de G 185-32 suggère des investigations plus approfondies sur la possible présence de triplets résonants dans le spectre d'une ZZ Ceti pour justifier la variation problématique de l'amplitude de certains modes en fonction de la longueur d'onde. Le cas particulier de PY Vul illustre bien ce phénomène : l'amplitude du mode de période 141.9 s dans le spectre de G 185-32 n'évolue pas en fonction de la longueur d'onde comme la théorie le laisserait prévoir. Deux scénarios ont déjà été proposés pour tenter d'expliquer le phénomène. Notre modélisation suggère une troisième hypothèse. Le mode à 141.9 s (de fréquence f_2) serait impliqué dans une vraie résonance qui mettrait en oeuvre 2 autres modes, respectivement de degrés sphériques $\ell=3$ (fréquence f_1) et $\ell=4$ ou $\ell=5$ (fréquence f_3), telle que : $f_1 + f_3 \simeq 2 \times f_2$.

Ces 2 autres modes de degrés supérieurs ne sont pas détectés dans les observations. Il est effectivement admis que plus le degré d'un mode est élevé et plus sa visibilité décroît (effet de moyenne géométrique), ce qui explique qu'aucun mode de degré $\ell \geq 3$ ne semble encore avoir été observé dans le spectre d'une étoile DAV et qu'ainsi les 2 autres modes du triplet résonant ne sont pas présents dans les données observationnelles. Il est donc indispensable de recourir à une modélisation pour connaître les périodes des modes de degré $\ell \geq 3$ du modèle retenu comme meilleur représentant de l'étoile pour pouvoir tester la réalité de cette hypothèse.

Si un mode occupe la position centrale d'un triplet résonant, l'amplitude de la combinaison linéaire résultant des 2 autres modes impliqués dans le triplet peut se juxtaposer à son amplitude propre et de ce fait l'amplitude résultante n'obéit plus aux prédictions théoriques. En outre, une telle configuration ($f_1 + f_3 \simeq 2 \times f_2$) serait favorable à l'occurrence du *frequency lock* ou du régime intermédiaire qui tous deux opèrent un couplage résonant entre les modes du triplet (réalisable seulement pour la résonance impliquant les modes de degrés $\ell=2$, $\ell=3$ et $\ell=5$ à cause de règles de sélection). Cette interaction non-linéaire entre les modes du triplet affecte leur amplitude et leur période, ce qui peut en soi-même pleinement justifier la marginalité du mode de période 141.9 s dans le spectre de PY Vul par exemple. Cependant la vérification de cette dernière hy-

pothèse requiert la connaissance des taux de croissance κ des modes mis en jeu dans le triplet, taux qui ne peuvent être évalués qu'au moyen d'un calcul de pulsations non-adiabatiques. C'est ainsi que notre analyse peut être continuée par le calcul non-adiabatique des modes de G 185-32, l'évaluation de leur taux de croissance κ puis par l'étude non-linéaire du couplage résonant qui peut s'opérer entre les 3 modes concernés.

Nous espérons ainsi vivement qu'après la lecture de cette thèse et des publications qu'elle a permis de générer, ce travail qui s'achève ici pourra être poursuivi par le développement d'au moins une des perspectives que nous venons d'énoncer.

Annexe A

ASTEROSEISMOLOGICAL CONSTRAINTS ON THE STRUCTURE OF THE ZZ CETI STAR *HL Tau 76*

D. Pech, G. Vauclair & N. Dolez

Université Paul Sabatier, Observatoire Midi-Pyrénées, CNRS/UMR5572, 14 av. E. Belin, 31400 Toulouse, France

Abstract

This paper reports on the results derived from an asteroseismological study of the cool ZZ Ceti star HL Tau 76. A grid of models has been computed in a parameter space covering the range of $\log g$ and T_{eff} , formerly determined by spectroscopy, and a large range of hydrogen mass fraction. The adiabatic non-radial oscillations for all the models have been computed for the modes with degree $\ell=1$ and $\ell=2$. An algorithm based on a χ^2 test was applied to evaluate the quality of the fit between observed and theoretical periods. This method resulted in selecting a best fitting model for which the average relative matching of the periods is 0.7%. Then, a detailed comparison between the observed and the computed periods for the $\ell=1$ and $\ell=2$ modes in the best fitting model was achieved in order to identify as many observed modes as possible. To perform this identification we used the calculated periods for which we applied the rotational splitting as deduced from the observations. Through this process we identify the 36 independent modes observed in HL Tau 76. The best fitting model for HL Tau 76 is well constrained owing to the large number of oscillations observed in this ZZ Ceti star. The main stellar parameters of HL Tau 76 derived from this analysis are : the total mass $M_{\star}=0.575 (\pm 0.005) M_{\odot}$, the hydrogen mass fraction q_H , estimated as thick as 2.35×10^{-4} . The helium mass fraction consistent with q_H must be $q_{He} = 1 \times 10^{-2}$. The method is not sensitive to T_{eff} variations in the narrow domain of temperature derived from spectroscopy for HL Tau 76. The best adjustment is found however for $T_{\text{eff}} = 11375$ K. The other derived stellar parameters are the luminosity ($L/L_{\odot} = 0.00389$) and the radius ($R/R_{\odot} = 0.0162$). We note some trends in the fit of the observed periods with the computed ones which suggest that the rotational splitting could be non-uniform and that the large amplitude modes might contain information on the convection-driven excitation mechanism.

A.1 Introduction

Asteroseismology is a powerful tool to infer precisely the internal structure of variable stars. By comparing their observed periods of oscillation with the periods predicted by the theory of non-radial pulsations, it is possible to derive the structure of the model or of the set of models which fits best the observations. This direct method has been successfully applied to the pulsating pre-white dwarfs of PG 1159 type (see for instance Winget et al., 1991; Vauclair et al., 2002) and to the pulsating DB white dwarfs (Winget et al., 1994). In the case of the pulsating DA white dwarfs (the ZZ Ceti stars), the application of the method has been less successful, mainly because of the smaller number of oscillation modes detected in those stars, compared to the rich spectra observed in the hotter classes of pulsating white dwarfs. The models are consequently not so well constrained for the ZZ Ceti stars and the solution is generally not unique. The results from the asteroseismological analysis of 9 ZZ Ceti stars observed with the Whole Earth Telescope (Nather et al., 1990) are discussed in Kepler et al. (1995) for G 226-29, Bradley (2001) for L 19-2, Bradley (1998) and Mukadam et al. (2003) for R 548, Bergeron et al. (1993) and Bradley (2001) for GD 165, Kleinmann et al. (1998) for G 29-38, Bradley (1998) for G 117-B15A, Pfeiffer et al. (1996) for GD 154, Kanaan et al. (2005), Metcalfe et al. (2004) and Fontaine & Brassard (2004) for BPM 37093 and Castanheira et al. (2004) for G 185-32.

However, the ZZ Ceti white dwarfs constitute the most numerous class of variable white dwarfs. About 70 ZZ Ceti stars are known after the recent discovery of 35 new ones from the SDSS (Sloan Digital Sky Survey) first release catalog (Mukadam et al., 2004a). Knowing the internal structure of DA white dwarfs is important in many respects and justifies the continuous effort to derive it from asteroseismology. The ZZ Ceti instability strip takes a trapezoidal form in the H-R diagram because of the dependence of its blue and red boundaries on the stellar mass. However, the width and the limits of the instability strip differ in the two samples from Bergeron et al. (2004) and from Mukadam et al. (2004b). More importantly, while Bergeron et al. (2004) find a *pure* instability strip, with no non-variable DA star within the instability strip in their sample, Mukadam et al. (2004b) get a different conclusion from the analysis of the SDSS sample which contains non-variable stars inside the instability strip. Whether this results from a genuine cohabitation of pulsators and non-pulsators within

the instability strip or from larger uncertainties in the atmospheric parameters derived from the lower S/N SDSS spectra needs to be further investigated. Nonetheless, the brightest of the non-pulsators that Mukadam et al. (2004b) find to lie within their instability strip is a $V=17.1$ magnitude star. The spectrum used to derive its atmospheric parameters has a S/N ratio of 35 (Kleinman et al., 2004). The S/N ratio for the fainter DA white dwarfs is of course lower. This makes the uncertainty on the location of the stars in the region of the instability strip larger than in the brighter Bergeron et al. (2004) sample for which the derived atmospheric parameters rely on $S/N \geq 80$ spectra. This may explain why both pulsators and non-pulsators seem to overlap in the SDSS sample. If the instability strip is a *pure* one, then it is an indication that the structure of the ZZ Ceti white dwarfs derived from asteroseismology could be considered as representative of the structure of the DA white dwarfs as a whole group.

The DA white dwarfs represent 80 % of the total white dwarf population (Fleming et al., 1986) and 97 % of the stars in the Galaxy are predicted to end their evolution as white dwarfs. Those stars are therefore of major interest: inferring accurately their internal structure is of capital importance to understand better the process of stellar evolution. Their cooling sequence can be used to determine the distances to galactic globular clusters (Salaris et al., 2001). Moreover, as they are the oldest stars in the Galaxy, they can be used to find out the age of the stellar population they belong to. Consequently, considerable efforts are made to improve our knowledge of the white dwarfs cooling sequence so that it can be used for cosmochronology (Winget et al., 1987; Fontaine et al., 2001). The method consists in comparing the observed white dwarf luminosity function with the one built from computed cooling sequences. The accuracy of this method depends on the precision with which one knows the structure of the white dwarf models used to build the cooling sequences. The main uncertainties in those models are: 1) the total mass and the precise chemical composition of the degenerate C/O core (i.e. the C/O ratio and its distribution as function of the radius); this is what rules the total thermal energy available for the cooling; 2) the mass fraction of the outer layers (He and H); this is what determines the rate at which the thermal energy stored in the core is transported to the stellar surface and radiated outward; in this respect, the hydrogen mass fraction is the most important quantity since the hydrogen opacity overwhelms the one of

the He; a large hydrogen mass fraction distribution would translate into a similarly large age distribution at a given luminosity and would considerably weaken the usefulness of the white dwarf cooling sequence for cosmochronology; 3) the way the crystallization occurs in the C/O core. Determining the hydrogen mass fraction in DA white dwarfs is also a clue to understand the chemical evolution of the white dwarfs along their cooling sequence. It determines if, and at which effective temperature (or luminosity), the convection zone in the hydrogen envelope reaches the H/He transition zone and mixes with the underlying helium convection zone, changing the spectral type from DA to DB or DC. This long debated question on whether DA white dwarfs have a “thin” or a “thick” hydrogen envelope is reviewed by Fontaine & Wesemael (1997).

The asteroseismology of the ZZ Ceti white dwarfs can potentially constrain some of those quantities. The total mass and the hydrogen mass fraction have strong impact on the g -mode pulsation spectrum. One expects to derive those quantities accurately enough. The average chemical composition of the degenerate C/O core could be deduced in principle from a measurement of \dot{P} , the rate of change of the pulsation periods. However, this measurement requires that there exists pulsation modes stable enough in period and amplitude so that we may be sure that they are not involved in some complex physical processes such as mode coupling, mode resonance, coupling with convection, and so on. In addition, the \dot{P} of a given mode would be a measure of the rate of cooling only if this mode propagates deep enough to “feel” part of the degenerate core (i.e. the mode is not trapped in a shallow hydrogen envelope). Finding such suitable pulsation modes for a \dot{P} measurement should be more likely in the hot ZZ Ceti pulsators since the interaction of the convection with the pulsations, which increases as the white dwarfs cool within the ZZ Ceti instability strip, is still negligible close to the blue edge. Even in those favourable circumstances, a few decades are required to get a significant \dot{P} measurement (see for instance Kepler et al., 2000).

Montgomery et al. (2003) have shown that the signature of the chemical transition regions on the period distribution, the mode trapping, may not be unambiguously interpreted in some circumstances. They found that the bumps in the Brunt-Väisälä frequency due to these transitions induce on the mode trapping a core/envelope symmetry. A chemical transition within the core, between its C/O central region and its progressively richer C external region, may have a similar mode trapping signa-

ture than the chemical transition zones in the envelope. These could be the He/C-O-He and C-O-He/C-O transitions in the DB white dwarf pulsators or the H-He and He/C-O transition zones in the DA pulsators. When the chemical transition zones are computed through a time-dependent diffusion scheme, as for instance in Córscico et al. (2005) or Brassard & Fontaine (2005), the outer transition zones may become so smooth that the structure inside the core dominates the mode trapping. However, in the case of the DA pulsators, Montgomery et al. (2003) show that the H-He transition zone has no core counterpart as long as the hydrogen mass fraction exceeds $q_H = (1 - M_H/M_*) = 10^{-6}$. We will show in the next sections that it is the case for HL Tau 76.

As a conclusion, asteroseismology is a potentially powerful tool to determine the fundamental parameters of the ZZ Ceti stars and especially their total masses and hydrogen mass fraction, two of the main uncertain parameters entering the modeling of white dwarf stars. In this respect, the ZZ Ceti HL Tau 76 is one of the most promising cases since it exhibits a rich oscillation spectrum.

HL Tau 76 was the very first discovered ZZ Ceti star (Landolt, 1968) and has been studied repeatedly, in particular during the WET (Whole Earth Telescope) multisite fast photometry campaigns XCOV13 and XCOV18. Many observational data are thus available and presented in details by Dolez et al. (2005). The power spectrum is complex and the oscillations are gathered within very narrow frequency bands separated by large gaps. This makes difficult any direct observational determination of its period spacing, ΔP . Furthermore, the lack of a large enough number of consecutive modes does not allow to deduce the ΔP vs. P diagram, which would contain a potential signature of mode trapping. Dolez et al. (2005) made a preliminary asteroseismological analysis based on the assumption of a period distribution following the asymptotic regime. They showed that most of the observed periods were consistent with $\ell=1$ and $\ell=2$ expected periods and suggested an identification for those modes. Deriving the fundamental parameters of HL Tau 76, as the total mass and the hydrogen mass fraction, implies going to the next step which consists in calculating the g -mode oscillation spectra of realistic models and searching for the model which fits the observations with the best possible accuracy. This is what is developed in this paper. Section A2 briefly sums up the observational data available on HL Tau 76. Section A3 introduces the modeling code used and

discusses the strategy applied to isolate the best fitting candidate from our full grid of models. Section A4 describes the best fitting candidate and lists the periods of its $\ell=1$ and $\ell=2$ modes. Taking advantage from our knowledge of the rotational splitting (from the study of Dolez et al., 2005), we then propose an identification for all the observed modes. Section A5 summarizes our results.

A.2 Observational background

The data relevant to HL Tau 76 observations are presented exhaustively in Dolez et al. (2005), which will be referred to as DVK hereafter.

The goal of this current article is neither to sum up nor to resume the work already exposed in the observational study; as a result we just retain from that article the full set of the observed periods in this ZZ Ceti star, once removed the linear combinations of genuine modes. The complete list of these periods is reproduced in Table A1 and relies on the data coming from the WET campaigns XCOV13, XCOV18 and from earlier archival observations.

DVK find 44 periods which they identify as independent pulsation modes of degrees $\ell=1$ and $\ell=2$ split by rotation. With such a number of modes, HL Tau 76 shows the currently richest oscillation spectrum among the ZZ Ceti stars. Those periods cover a wide range, between 380 s and 1390 s. But their distribution reveals a striking peculiarity: many modes occupy very tightened zones in frequency while large domains remain empty. This characteristic greatly complicates the analysis of this spectrum and makes the use of theory and modeling clearly compulsory to deduce the structural properties of this ZZ Ceti star by means of asteroseismology. The rich oscillation spectrum should strongly constrain the internal structure of HL Tau 76 as it will be proved in the next sections. The reader is invited to see the DVK accompanying paper to get further details regarding HL Tau 76 observational material and data reduction.

A.3 Modeling strategy

The principle is to calculate the non-radial g -modes in a grid of static models in order to compare their periods with those derived from observations and then to search for the best fitting solution.

The code computes complete static models from the center to the surface through a shooting method. The differential equations are integrated outward from boundary conditions at the center, and inward

from boundary conditions at the surface (indeed at optical depth $\tau = 2/3$). The integration algorithm uses a self-adapting Runge-Kutta routine to optimize the model layers depth. The number of mesh points is increased within the H/He and He/C transition zones to obtain an accurate description of these zones. The models have typically a total number of ≈ 700 layers whose ≈ 490 describe the hydrogen outer layer and the H/He transition zone, 40 the He layer and 170 the He/C transition zone and the carbon core. This number of layers is sufficient to get the required accuracy on the Braunt-Väisälä frequency of the model, i.e. the required accuracy on the g -mode frequencies. The convergence between the outward and inward integrations is obtained through a Newton-Raphson iterative method. The atmospheric structure is derived by fitting a T - τ relation from Koester's atmosphere models of T_{eff} and $\log g$ suitable for the HL Tau 76 atmospheric parameters. The OPAL Rosseland mean opacities (Iglesias & Rogers, 1996) and EOS are used in the H and He outer layers, with the appropriate interpolation within the transition zone. They are completed in the deeper layers by the electronic conductivity as tabulated in Itoh et al. (1983 & 1984) and Mitake et al. (1984).

Our models have a pure carbon core. Stellar evolution calculations predict that real white dwarfs stars must have a C-O core whose composition and relative distribution depend on the previous stages of evolution. But as we compute static models, and not an evolutionary sequence, this simplification does not affect sensibly our models since the equilibrium pressure is provided by the degenerate electrons through the mean molecular weight per free electron, μ_e , which is identical for C and O. In addition, Montgomery et al. (2003) have shown that a structure in the C/O profile within the core cannot mimic the signature of a H/He transition for a hydrogen mass fraction larger than $\approx 10^{-6}$. It will be proved below that the period distribution in HL Tau 76 requires a larger hydrogen mass fraction. As a consequence, any mode trapping, would it be found in the period distribution, could not lead to an ambiguous identification.

In the carbon core, the EOS is taken from Fontaine et al. (1977). The convection is described by the mixing length theory in its ML2, $\alpha=0.6$ version according to Bergeron et al. (1995). The H/He and He/C transition zones are described in the element diffusion equilibrium approximation, as in Tassoul et al. (1990). This description relies on the trace element approximation. More realistic description of the chemical transition zones induced by diffusion,

which do not use this approximation, have been incorporated in recent works (Córscico et al., 2002; Metcalfe et al., 2003; Brassard & Fontaine, 2005).

Table A1. Periods list in HL Tau 76 spectrum after Dolez et al.

Periods (s) XCOV18	Periods (s) XCOV13	Periods (s) Archives
1390.8		
	1347.9	1353.7 1308.7
1070.8		
1067.5		
1065.0	1065.0	
1061.8		
1060.2		
979.2		
976.4		
974.4		
971.6		
933.2	932.5	
930.6		
799.1		
798.3		
796.4	796.5	
794.1		
792.7		
	781.0	
		748.5
738.7		
		689.3 665.0
664.2		
663.6		
662.8		
662.3		
661.9		
661.4		
660.1		
659.5		
	657.4	
		628.0
598.6		
597.1	597.0	
596.8		
542.4		
541.8		
540.9	541.0	
494.2	494.2	495.0
493.2		
	449.8	
394.3		
382.5	382.5	

Córscico et al. (2001 & 2002) have computed fully evolutionary white dwarf models taking into account time dependent element diffusion.

They found that the H/He transition zone in those models is smoother than in models computed within the equilibrium diffusion approximation. As a consequence, the mode trapping induced by the transition zone is weaker. However, since HL Tau 76 (with $T_{\text{eff}} = 11450$ K) is cooler than their template model (12000 K) of similar total mass, and therefore accordingly older, the H/He transition zone in HL Tau 76 is supposed to be closer to the equilibrium diffusion than in the hotter model of Córscico et al. In addition, it will be shown in the following that the best fitting model for HL Tau 76 has a more massive hydrogen outer layer than the Córscico et al. template model. As a result, the effect of mode trapping decreases to the point where the differences in the structure of the H/He transition zone induced by the different assumptions is supposed to have negligible effect on the periods, or at least comparable to the other uncertainties entering the models computation. We trust that the description of the transition zone is accurate enough for the purpose of this study.

The Brunt-Väisälä frequency, N^2 , is computed in the models according to the expression (Brassard et al., 1991): $N^2 = g^2 \varrho / P \times \chi_T / \chi_\varrho (\nabla_{ad} - \nabla + B)$ with: $B = -1 / \chi_T (\partial \ln P / \partial \ln Y)_{\varrho, T} d \ln Y / d \ln P$ where Y is the relative helium abundance and with the thermodynamics quantities: $\chi_T = (\partial \ln P / \partial \ln T)_{\varrho, X_i}$ and $\chi_\varrho = (\partial \ln P / \partial \ln \varrho)_{T, X_i}$.

The B term is non-zero only in the chemical transition zones. As the $(\partial \ln P / \partial \ln Y)_{\varrho, T}$ term tends to zero with increasing degeneracy, the influence of the B term decreases as the H and He mass fractions increase since the transition zones occur in a region of larger degeneracy. That is why the mode trapping diminishes with increasing H and He mass fractions.

The non-radial g -modes are computed in the adiabatic approximation for each model. We only consider the $\ell=1$ and $\ell=2$ modes since modes of higher ℓ degrees are unlikely to be observed. DVK find that all the periods observed in HL Tau 76 are consistent with the period distribution expected in the asymptotic regime for $\ell=1$ and $\ell=2$ modes. The pulsation periods computed in the adiabatic approximation are accurate enough for a comparison with the observed periods. The computation of the kinetic energy associated to each pulsation mode allows to identify the potential trapped modes in the pulsation spectrum of a model when the thickness of the hydrogen and the helium layers favours the mode

trapping phenomenon. As it is well known, the trapped modes present a lower kinetic energy than normal modes and in a plot of the kinetic energy as a function of period, the trapped modes appear as local minima. Under the conditions that a sufficiently large number of consecutive order modes (k) of a given degree (ℓ) are observed, the period difference between consecutive modes (ΔP), when plotted as a function of the period (P), provides a ΔP vs. P diagram which, together with the minima in the kinetic energy plot, is useful to deduce the trapping cycle of the star. The average period spacing ΔP and the ΔP vs. P diagram with the mode trapping then strongly constrain the main features of the stellar structure: its H (and possibly its He) mass fraction(s) and its total mass. In the case of HL Tau 76, there are not enough consecutive order modes in the available observational data. It is not possible to make such a ΔP vs. P diagram. We have to rely on the direct comparison of the periods calculated in the grid of models with the observed ones. The computed kinetic energy may then be used to identify the nature, trapped or untrapped, of the modes detected in HL Tau 76.

The first step consists in building a grid of white dwarf models. The structure of those models depends mostly on 7 parameters:

- the total stellar mass M_*
- the H layer mass fraction, $q(H)=M(H)/M_*$
- the effective temperature T_{eff}
- the He layer mass fraction, $q(He)=M(He)/M_*$
- the core composition
- the rotation rate of the star and a possible differential rotation inside the star
- the version of the mixing length theory (MLT).

Only the first 3 ones have been varied in our study. The helium mass fraction is a dependent parameter whose value is ruled by the mass of the hydrogen envelope, according to the arguments later developed in this section. The stellar core is considered as a pure carbon, degenerate core as justified above; the effect of stellar rotation, differential or not, on the stellar structure is ignored. But the rotational splitting induced by the rotation in the power spectrum of HL Tau 76 is taken into account in our identification procedure of the observed modes; as for the mixing length theory, the ML2 version with $\alpha=0.6$ has been adopted, according to the analysis of Bergeron et al. (1995).

Bergeron et al. (1995) determined the atmospheric

parameters of HL Tau 76 from spectroscopy:

$\log g = 7.89 (\pm 0.05)$ and $T_{\text{eff}} = 11450 (\pm 350)$ K. They note that their adopted uncertainties on T_{eff} are conservative overestimates. More recently Bergeron et al. (2004) revised the T_{eff} uncertainties in their sample to ± 200 K. The surface gravity translates into a total mass $M_* = 0.55 (\pm 0.03) M_\odot$ for a thick hydrogen model, with $q(H) = 10^{-4}$, and $q(He) = 10^{-2}$ according to the models of Wood (1995). These values for the total mass and T_{eff} are taken as starting points for the computation of our grid of models. The uncertainty on the spectroscopically determined mass and T_{eff} confines those parameters within a narrow range. The main parameter left which strongly affects the periods of the g -modes is $q(H)$. Therefore, the size of the space parameters to be explored for modeling HL Tau 76 is reasonably small. The computation of the grid of models does not require the use of a computer consuming method based on genetic algorithm. The helium mass fraction was initially set at the value $\log q(He) = -2$, which is the commonly assumed value for this parameter. We keep in mind that the determination of the helium mass fraction from asteroseismology remains a difficult exercise since the pulsation modes are rather insensitive to this parameter. For the $q(H)$ values, we first chose a rough cutting with wide grid meshes, which was later refined according to the preliminary results.

The comparison between the computed modes and the observed periods is based on a χ^2 test algorithm. For each model in the grid and each observed period, the algorithm searches for the closest period within the $\ell=1$ and the $\ell=2$ periods from the model. Then it computes the square of the difference between the two periods. It proceeds following this way for all the observed periods while adding the squares and consequently gets a sum of least squares (χ^2). The lower the χ^2 , the better the agreement between computed and observed periods.

We only considered the $\ell=1$ and $\ell=2$ modes since modes with higher ℓ degrees are very unlikely to be actually observed. When several frequencies are observed in the same narrow range of the power spectrum of HL Tau 76, we keep only the average value of these frequencies not to bias the resulting χ^2 by favouring these groups of modes. This is justified by the fact that such close frequencies are supposed to be various components of a multiplet generated by a single mode split by rotation. This unproved assertion is however validated *a posteriori* in section A4. In the list of the observed periods, we take profit from the preliminary classi-

fication between the possible $\ell=1$ and $\ell=2$ modes as presented by DVK. Nonetheless, their mode identification (in their Table 7) is based on the assumption that the observed period distribution closely follows the expected asymptotic regime. Thanks to the present study, we can now compare the observed periods with the periods calculated in realistic models, which do not need to follow closely this asymptotic regime period distribution. For this reason, we rely here on their Table 6-1 and Table 6-2 which still reflect the possibility for some observed pulsations to be either $\ell=1$ or $\ell=2$ modes. Furthermore, the distinction between the presumably $\ell=1$ or $\ell=2$ modes has to be included in our process : we must compare computed and (supposed) observed modes relevant to the same ℓ degree. Otherwise, the algorithm could associate computed $\ell=1$ modes with observed $\ell=2$ modes and *vice versa*. Such a mismatch could spoil the validity of the results derived from the algorithm. Nonetheless, when DVK mention that a given mode may be a $\ell=1$ as well as a $\ell=2$ mode or when they can not assign a value for the ℓ degree, this one is included in the two lists of observed modes classified according to their supposed ℓ degree.

In the first grid of models we let two parameters vary: the hydrogen mass fraction takes the values $\log q(H) = -4, -6, -8$ and -10 and the T_{eff} takes the successive values 11350 K, 11450 K and 11550 K. This range in T_{eff} takes into account the uncertainty as given by Bergeron et al. (2004). The stellar mass is kept fixed at $0.55 M_{\odot}$.

The algorithm failed at discriminating the effective temperature. This is not surprising since, in this narrow range of T_{eff} , the models do not change significantly, all other parameters being kept fixed. By contrast, it systematically selected the models with the highest hydrogen mass fraction with $\log q(H) \geq -6$ as the best candidates. We consequently refined the grid by computing and analysing extra models with $\log q(H) = -5, -4.3, -3.3$ and -3 . For this second grid of models, we kept the same mesh in T_{eff} . The models with $\log q(H) = -3$ are probably not realistic since stellar evolution does not predict such a large amount of remaining hydrogen at the white dwarf stage. But they were nonetheless quite useful to insulate the minimum χ^2 by showing that it increases again sharply, once the optimal value of $q(H)$ is exceeded. A full set of 24 models has thus been analysed with the algorithm. For each value of $q(H)$, the 3 χ^2 relevant to the 3 different T_{eff} were averaged for the $\ell=1$ and the $\ell=2$ modes respectively. These results are shown in Fig. A1 and Fig. A2.

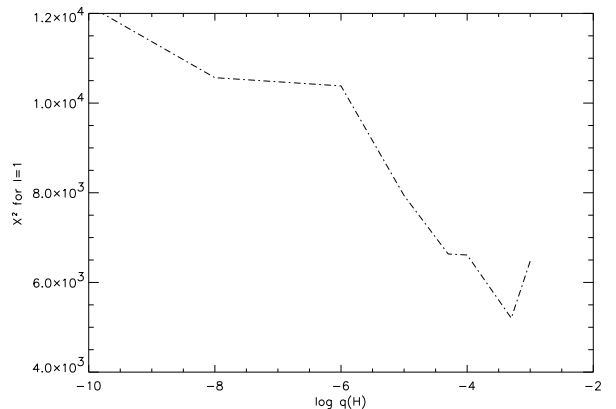


Figure A.1: χ^2 vs. $\log q(H)$ for $\ell=1$ modes with $M_{\star} = 0.55 M_{\odot}$

Both Fig. A1 and Fig. A2 make it clear that the lowest χ^2 is reached for models with $q(H)=1$ up to 5×10^{-4} . In order to get the statistically most probable value for $q(H)$, a weighted mean was calculated over the 8 best models (excluding models with $q(H) = 10^{-3}$ since they are rather unrealistic), the weighting coefficients being inversely proportional to the χ^2 pertaining to the considered model. The weighted means derived for the $\ell=1$ and the $\ell=2$ modes are in a perfect agreement and both lead to a value of $q(H) = 2.35 \times 10^{-4}$. The hydrogen mass fraction in HL Tau 76 has thus been constrained.

The large value deduced for $q(H)$ involves a tight constraint on $q(He)$ owing to two theoretical considerations. The first one, which is also the strongest, sets an upper limit near $q(He) = 10^{-2}$ for the helium mass fraction so as to prevent the bottom of this layer from being hot enough for fusion. The second condition imposes that the helium envelope must be roughly about 50 to 100 times thicker than the external hydrogen layer to avoid overlap between both the H/He and the He/C transition zones. Indeed, if these two zones overlapped, carbon could diffuse and reach the stellar surface, and yet carbon lines are not observed in the ZZ Ceti spectra. To get these two conditions simultaneously satisfied, there is one single value suitable for the helium mass fraction: $q(He) = 10^{-2}$, which is moreover the value generally adopted for modeling DA white dwarfs and most of the ZZ Ceti stars.

The next step is to evaluate the whole stellar mass and the effective temperature of HL Tau 76 to complete the determination of the free stellar parameters. According to Bergeron et al. (1995), the spectroscopic determination of the surface gravity, $\log g = 7.89 (\pm 0.05)$, leads to a mass of $0.55 (\pm 0.03)$

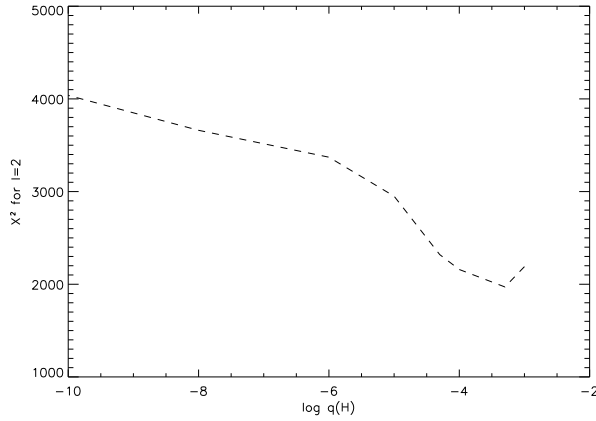


Figure A.2: χ^2 vs. $\log q(H)$ for $\ell=2$ modes with $M_\star = 0.55 M_\odot$

M_\odot . The allowable range of mass for HL Tau 76 spreads thus between $0.52 M_\odot$ and $0.58 M_\odot$. However, we slightly exceeded those limits to identify clearly the lowest χ^2 . All the models in this series used to determine the mass of HL Tau 76 have the same $q(H) = 2.35 \times 10^{-4}$ and $q(He) = 10^{-2}$. The T_{eff} takes again the three previously assigned values: 11350 K, 11450 K and 11550 K.

As for the M_\star values, we selected: $0.52 M_\odot$, $0.55 M_\odot$ and $0.58 M_\odot$ in a first run. According to these first models, the algorithm indicates that the total mass of HL Tau 76 appears to locate near the upper limit. So we completed our grid with models of 0.56 , 0.57 , 0.59 , 0.60 and $0.62 M_\odot$.

The two highest values for M_\star are by far greater than the maximal mass allowed by spectroscopic determination. However, we kept these models because they are necessary to confine precisely the best fitting mass in the χ^2 vs. M_\star plane like illustrated in Fig. A3 and Fig. A4.

As for the $\ell=1$ modes (Fig. A3), the χ^2 algorithm favours the model with $0.57 M_\odot$ whereas the $0.58 M_\odot$ model is preferred in the case of the $\ell=2$ modes (Fig. A4).

These two results are coherent and suggest that $M_\star = 0.575 (\pm 0.005) M_\odot$ is the best total mass for HL Tau 76. It is interesting to note this mass determination agrees with the upper limit allowed by spectroscopy. Besides, the χ^2 tests reveal a secondary minimum for $0.60 M_\odot$ for both the $\ell=1$ and $\ell=2$ modes. This value however falls outside the range allowed by spectroscopy and is anyway less pertinent than the 0.57 - $0.58 M_\odot$ minima in terms of χ^2 . It thus can be rejected confidently and we

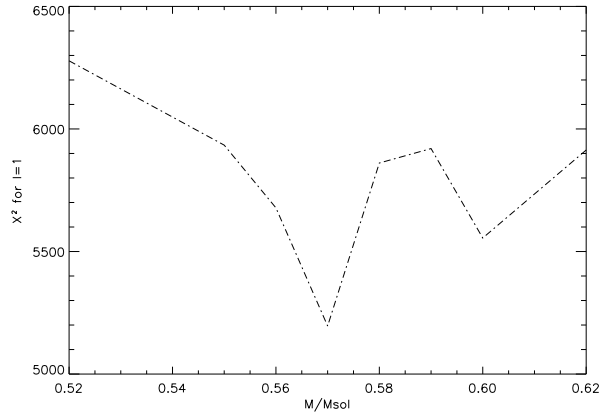


Figure A.3: χ^2 vs. M_\star for $\ell=1$ modes

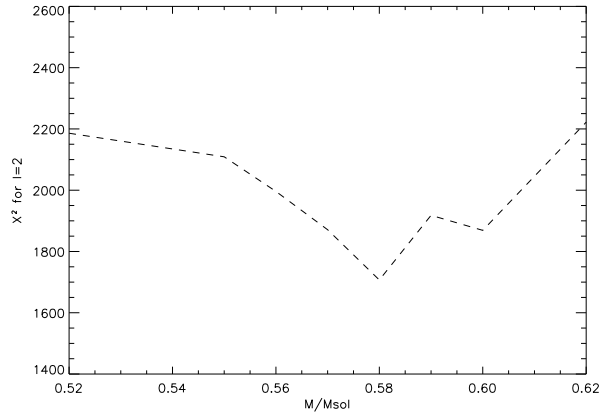


Figure A.4: χ^2 vs. M_\star for $\ell=2$ modes

keep $0.575 (\pm 0.005) M_\odot$ as the unambiguous mass of HL Tau 76.

Now that the mass of HL Tau 76 is accurately determined, it is necessary to check *a posteriori* the validity of the hydrogen mass fraction determination since it was obtained in the first step with models whose mass was fixed at $0.55 M_\odot$. Another grid of models has been computed and analysed, with a total mass of $0.575 M_\odot$ instead of $0.55 M_\odot$. In this grid, we did not consider models with $\log q(H) \leq -6$ and built additional models with $\log q(H) = -3.4$, -3.5 and -3.6 . The χ^2 test applied to this grid selected as the best one the model with $\log q(H) = -3.6$, as well as for the $\ell=1$ as for the $\ell=2$ modes.

It confirmed the former hydrogen mass fraction determination: $q(H) = 2.35 \times 10^{-4} M_\star$.

So as to test whether the effective temperature can be constrained better, we explored models with an enlarged T_{eff} distribution. From spectroscopic data, Bergeron et al. (1995) originally suggested that HL Tau 76 has an effective temperature ranging from 11100 K to 11800 K and centered on 11450 K. This range comes from a conservative overestimate of the uncertainty on T_{eff} as discussed by Bergeron et al. (1995). We used this full range of T_{eff} for this test. We built two parallel grids sharing the same hydrogen mass fraction, $q(H) = 2.35 \times 10^{-4}$, and the same helium mass fraction, $q(He) = 10^{-2}$. The models have a total mass of $0.575 M_{\odot}$ in the first series and $0.565 M_{\odot}$ in the second one. The second set of models is used to check that the sensitivity of the algorithm on the variation of T_{eff} does not behave differently for slightly different masses. The models are computed with an average difference of 30 K between two consecutive models in the first grid and 60 K in the second one. The resulting χ^2 did not select any particular best value for the effective temperature. In the HL Tau 76 range of T_{eff} , the period distribution is not sensitive enough to slight variations of T_{eff} for this parameter to be precisely determined from a global χ^2 test. As a matter of fact, we examined case by case each model in the grid with $M_{\star}=0.575 M_{\odot}$ to compare their respective computed periods with HL Tau 76 real spectrum in order to extract the best fitting candidate. The differences between models' spectra for a same ℓ degree were really weak, which illustrates once again that the effective temperature does not influence sensitively the pulsation periods. Nonetheless, a careful analysis of the overall $\ell=1$ and $\ell=2$ spectra placed the model with 11375 K as the best one possible.

A.4 Identifying HL Tau 76 pulsation modes

A.4.1 Featuring the best model

Now that the determination of HL Tau 76 stellar parameters is fully completed, it is possible to study the properties for our best fitting model. The modeling strategy used to get constraints on HL Tau 76 internal structure set accurately 4 free stellar parameters and resulted in isolating a best candidate in our full grid of models. This best fitting model has a full mass $M_{\star} = 0.575 M_{\odot}$, a hydrogen envelope as thick as $q(H) = 2.35 \times 10^{-4}$, a helium layer mass such as $q(He) = 10^{-2}$ and an effective temperature $T_{\text{eff}} = 11375$ K. To estimate the uncertainty on the

derived total mass and hydrogen mass fraction, we evaluate how much those quantities need to vary in order to induce a 10% increase of the χ^2 relatively to their minimum values. The inferred total mass uncertainty is $0.005 M_{\odot}$ while the uncertainty on the hydrogen mass fraction is $10^{-5} M_{\star}$. From these parameters, we induce the luminosity and the radius: $\log(L/L_{\odot}) = 0.00389$ and $R/R_{\odot} = 0.0162$. These parameters for our best candidate are summarized in Table A2.

Table A2. Best fitting model parameters

Stellar mass	$M_{\star} = 0.575 M_{\odot}$
Effective temperature	$T_{\text{eff}} = 11375$ K
Hydrogen layer mass	$M(H) = 2.35 \times 10^{-4} M_{\star}$
Helium layer mass	$M(He) = 10^{-2} M_{\star}$
Luminosity	$L = 0.00389 L_{\odot}$
Stellar radius	$R = 0.0162 R_{\odot}$

We computed the $\ell=1$ and $\ell=2$ adiabatic modes for this best fitting model and then attempted to match the computed periods with the observed ones. While performing this task, we took the observed rotational splitting into account since the periods are computed for $m=0$ modes whereas the observed modes may correspond to any m value between $-\ell$ and $+\ell$. The results of our adiabatic calculations for the $\ell=1$ and the $\ell=2$ modes are given in Table A3a and Table A3b. The comparison of these tables shows that a number of $\ell=1$ and $\ell=2$ modes have very close periods. Within the range of the observed periods, between ≈ 380 s and ≈ 1390 s, 20 $\ell=1$ modes and 36 $\ell=2$ modes are found. Among them, 10 modes overlap in period with a relative period difference smaller than 0.8%. It is consequently not surprising that the precise identification of the observed periods may remain ambiguous in these overlapping frequency domains. The rotational splitting makes things even worse.

It is now well established that a thick hydrogen layer in a ZZ Ceti star is not favourable to mode trapping (see for instance Brassard et al., 1992). Since we find that the best fitting model for HL Tau 76 has a very thick hydrogen layer, its power spectrum should not probably exhibit signature of mode trapping. As a result, plotting the kinetic energy of its pulsation modes versus their respective period is not

likely to reveal any minimum in the curve. This theoretical prediction is indeed verified in Fig. A5 and Fig. A6 which display respectively the $\ell=1$ and the $\ell=2$ modes kinetic energy versus their period.

A.4.2 Predicted and observed spectra. Periods identification.

The pertinence of any selected model of HL Tau 76 can be tested by comparing its pulsation periods with the modes observed in the real star. The periods of the $\ell=1$ and $\ell=2$ modes for the best fitting model are listed in Table A3a and Table A3b. These lists are restricted to a domain of periods covering the observed range, extended towards the shorter periods down to the order $k=1$. From Table A3a, the average period spacing for the $\ell=1$ modes predicted in the best fitting model, $(\overline{\Delta P}_{\ell=1,th})$ is obtained. We evaluated $\overline{\Delta P}_{\ell=1,th}$ between the mode $\ell=1, k=4$ (period 361.1 s) and the mode $\ell=1, k=25$ (period 1406.9 s). This range fits roughly the periods observed in HL Tau 76 and furthermore avoids the low order k modes which may significantly depart from the asymptotic regime.

We find $\overline{\Delta P}_{\ell=1,th} = 49.8$ s. This value can be compared with the average period spacing that DVK suggest for the supposed $\ell=1$ modes observed in HL Tau 76 ($\overline{\Delta P}_{\ell=1,obs} = 48.0$ s). The two values are in good agreement.

Similarly, from Table A3b, we obtain $\overline{\Delta P}_{\ell=2,th}$, the average period spacing for the $\ell=2$ modes for the best fitting model. We calculate $\overline{\Delta P}_{\ell=2,th}$ between the mode $\ell=2, k=9$ (period 360.1 s) and the mode $\ell=2, k=45$ (period 1391.2 s), which corresponds also to high enough values of k for the asymptotic regime to be valid. We get $\overline{\Delta P}_{\ell=2,th} = 28.6$ s. This value is in good agreement with the value $\overline{\Delta P}_{\ell=2,obs} = 27.7$ s that DVK derived for the average period spacing for the $\ell=2$ modes, too.

The satisfactory agreement between the observational and theoretical average period spacings, for both $\ell=1$ and $\ell=2$ modes, already indicates that our selected candidate should be a good representation of HL Tau 76.

1. Multiplets caused by the rotational splitting

The closely spaced frequencies in the Fourier spectrum are usually due to rotational splitting. A ℓ mode is split into a $(2\ell + 1)$ multiplet. The frequency shift between the components of the multiplets is used to estimate the stellar rotation rate while the number of

the components in a multiplet allows an identification of the ℓ value. In HL Tau 76, the situation is made complex by the fact that some multiplets due to the rotationally split $\ell=1$ and $\ell=2$ modes overlap. However, we can use the periods computed in the best fitting model (which are for the $m=0$ component for each ℓ and k mode) together with the value of the average rotational splitting as derived from the observations (DVK) to fit the observed periods. We assume here that the observed period distribution in HL Tau 76 may be reproduced by such $\ell=1$ and $\ell=2$ modes split by rotation. We do not consider the possible additional effect of a weak magnetic field on the frequency shift.

The frequency of the rotationally split modes of degree ℓ and order k are related to the frequency of the $m=0$ mode by:

$$\sigma_{k,\ell,m} = \sigma_{k,\ell} + m \times (1 - C_{k,\ell}) \times \Omega \text{ with}$$

$$C_{k,\ell} = \frac{\int_0^R \rho r^2 [2a(r)b(r) + b(r)^2] dr}{\int_0^R \rho r^2 [a(r)^2 + \ell(\ell+1)b(r)^2] dr}$$

after Ledoux and Walraven (1958). In this last expression a stands for the radial elementary displacement and b for the tangential elementary displacement. When the radial order is high (case of the *asymptotic limit*), $C_{k,\ell} \sim 1/[\ell(\ell+1)]$. With $\delta f = (1 - C_{k,\ell}) \times \Omega$, we derive within the asymptotic limit approximation: $\delta f_{\ell=1} = 0.6 \times \delta f_{\ell=2}$.

This last relation leads to a good estimate for $\delta f_{\ell=2}$ given $\delta f_{\ell=1}$ and *vice versa*. From the observed multiplets in the power spectrum of HL Tau 76, DVK found $\delta f_{\ell=1} = 2.54 \mu\text{Hz}$ and therefore $\delta f_{\ell=2} = 4.23 \mu\text{Hz}$. These values were obtained from a small number of identified multiplets. Here, we will assume that these values are correct for the whole range of frequencies observed in HL Tau 76. We can then calculate the frequency for all the components of a multiplet corresponding to any $\ell=1$ or $\ell=2, m=0$ mode computed by the program. Rigorously, the numerical expressions derived for $\delta f_{\ell=1}$ and $\delta f_{\ell=2}$ from the asymptotic limit are valid only for high radial overtones. As discussed by DVK and as confirmed by the identification of the modes proposed hereafter, the modes observed in HL Tau 76 correspond to order $k \geq 4$ for the $\ell=1$ modes and to $k \geq 10$ for the $\ell=2$ modes. We trust that these values of k are high enough for the asymptotic regime to be valid in the case of HL Tau 76.

2. Matching computed and observed modes

The identification for all the modes observed in HL Tau 76 is provided in Table A4. The first column lists the computed periods which best fit the observed ones, taking the rotational splitting effect into account. The next three columns give the proposed identification for the degree ℓ , the order k and the azimuthal number m . The fifth column lists the observed periods to be compared to the computed ones. The absolute difference between observed and computed periods, $|\overline{\delta P}|$, is given in the next column. When slightly different values of the observed periods are allotted to a same mode, as it happens in a few cases for periods derived from different data sets, we take the average value. The last column gives the relative differences between observed and computed periods. In some cases of ambiguous identifications between different ℓ values, we chose the solution that offered both the best fit *and* a consistent value for $|\overline{\delta P}|$ within a same multiplet.

A close visual comparison between observed and computed spectra is shown in Fig. A7 to Fig. A10.

A.4.3 Discussion

Table A4 suggests the following comments on the overall quality of the fitting. Although there is no objective way of assessing the quality of a matching between computed and observed periods, we adopt the following subjective one, based on the value of $|\overline{\delta P/P}|$. We consider the fitting as:

- excellent if $|\overline{\delta P/P}| \leq 0.5 \%$
- good if $0.5 \% < |\overline{\delta P/P}| \leq 1.0 \%$
- satisfactory if $1.0 \% < |\overline{\delta P/P}| \leq 1.5 \%$
- poor if $1.5 \% < |\overline{\delta P/P}|$.

The last case (poor adjustment) may also mean that none of the periods computed for the best fitting model can account for the observed mode. According to the above criteria, we rate the quality of the matching of the periods observed in HL Tau 76 with those computed for our best fitting model. Whereas DVK give a total of 44 frequencies observed in HL

Tau 76, Table A4 lists only 37 values because some frequencies are so close that they must represent the same mode. Table A4 shows that the matching is excellent for 17 modes, good for 13 modes, satisfactory for 3 modes and poor for 3 modes. The period at 781.0 s is not matched at all and this case is discussed hereafter.

The average value of $|\overline{\delta P/P}|$ for all the modes listed in Table A4 is 0.7%, which is currently considered as a good global fitting. Even in the last category, the worst fit is only at 1.9 % for the mode at 542.4 s. The overall quality of the matching may be also evaluated by estimating the mean $\sigma = (\Sigma |\overline{\delta P}|)/n$ and the root mean square $\sigma_{rms} = \sqrt{(\Sigma |\overline{\delta P}|^2)/n}$ where n stands for the total number of considered modes. Here $n = 36$ since the mode at 781.0 s is not considered as a true pulsation in our analysis, as discussed below.

So, $\sigma = 4.35$ s and $\sigma_{rms} = 5.27$ s. Considering that σ and σ_{rms} are calculated over a large number of modes ($n = 36$), these values confirm that the global fitting is good.

We emphasize the fact that the calculated periods in Table A4 rely on the theoretical values computed for the $\ell=1$ and $\ell=2$, $m=0$ modes for the best fitting model to which was applied an uniform rotational splitting as derived from the observations (DVK). However, the value for the rotational splitting has been obtained from a small number of well identified multiplets. If the observational data did not reveal any potential variation of the rotational splitting with the period, one could not exclude such a variation. The assumption of a constant rotational splitting in the whole range of periods observed in HL Tau 76 contributes to the σ and σ_{rms} estimates. If part of the mismatch between observed and calculated periods is due to the assumption of a constant rotational splitting, one should find a correlation between $|\overline{\delta P/P}|$ and the period since we expect a smooth dependence of the rotational splitting on the period. Examination of Table A4 shows a trend for the long periods to be better matched, in average, than the short periods. That may be an indication that a possible variation of the rotational splitting with period contributes to the mismatch. The mismatch could also be partly due to the effect of a weak magnetic field. DVK suspect that such a weak magnetic field (of order $1 - 2 \times 10^3$ G) might be responsible for the asymmetry observed in the triplets for HL Tau 76 spectrum. However, the frequency shift induced by a weak magnetic field is predicted to increase with the g -mode order k for a given degree ℓ , i.e. increase with period (Jones et

al., 1989). This is opposite to the trend we obtain from Table A4. As both a non-uniform rotational splitting and a weak magnetic field may contribute to the period mismatch, it is not possible to disentangle their effect.

Table A3a. $\ell=1$ modes periods for the best fitting model

k	period (s)	k	period (s)
1	135.4	14	853.6
2	265.2	15	900.0
3	305.4	16	951.7
4	361.1	17	1015.7
5	401.2	18	1059.2
6	431.5	19	1094.7
7	499.0	20	1152.5
8	557.0	21	1201.0
9	613.5	22	1256.8
10	651.8	23	1312.7
11	698.7	24	1376.7
12	742.5	25	1406.9
13	801.6	26	1455.1

Table A3b. $\ell=2$ modes periods for the best fitting model

k	period (s)	k	period (s)
1	78.2	24	798.7
2	154.4	25	825.1
3	177.2	26	846.2
4	214.3	27	877.9
5	246.5	28	905.3
6	276.7	29	929.9
7	292.8	30	960.2
8	323.8	31	991.8
9	360.1	32	1015.5
10	389.8	33	1052.0
11	417.4	34	1086.3
12	444.1	35	1105.1
13	468.5	36	1132.9
14	500.0	37	1167.1
15	527.2	38	1197.4
16	552.6	39	1220.9
17	589.1	40	1260.8
18	623.7	41	1288.6
19	648.2	42	1304.8
20	671.5	43	1342.9
21	697.0	44	1374.2
22	727.6	45	1391.2
23	759.1	46	1424.4

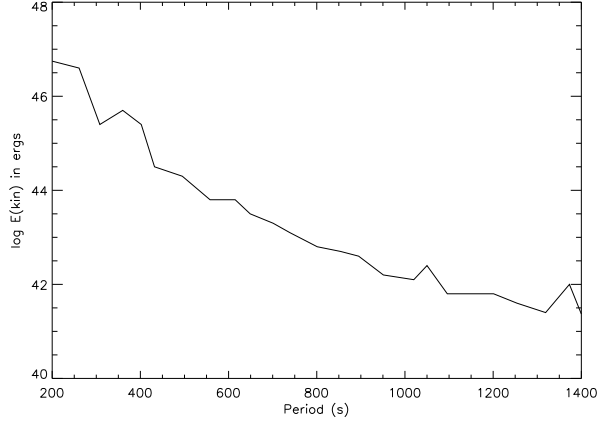


Figure A.5: $\log E_{kin}$ vs. P for $\ell=1$ modes for the best fitting model

The global quality of the matching shows that the selected best fitting model is well constrained and represents satisfactorily the internal structure of HL Tau 76. However, considering that HL Tau 76 has an effective temperature close to the red edge of the instability strip where the convection is supposed to increasingly interact with the pulsations, the global fit is even surprisingly good. Since the instability of the g -modes in the cool ZZ Ceti stars is mainly driven by the convection (Brickhill, 1990 & 1991; Goldreich & Wu, 1999a & 1999b; Wu & Goldreich, 1999 & 2001), one would expect the largest amplitude modes may reveal the signature of the interaction with convection better than the small amplitude ones. For instance, one could speculate that, as a result of the nonlinear interaction with convection, the frequencies of the large amplitude modes might deviate from the frequencies determined from the linear adiabatic calculations more than the frequencies of the small amplitude modes. By looking at the values of $|\delta P/P|$ as a function of the mode amplitude, we find a hint for such a trend: the fit is better for the low amplitude modes than for the large amplitude ones. For the modes with an amplitude $A \leq 12$ mma, the $|\delta P/P|$ slightly rises with increasing amplitude with a large dispersion. However, for the 4 largest amplitude modes, with periods 382.5 s, 494.2 s, 541.0 s and 597.0 s, for which $A \geq 14$ mma, the quality of the fit is never better than $\approx 1\%$. For the members of the multiplet at 541.0 s, which are the dominant modes during the two WET campaigns XCOV13 and XCOV18 (DVK), Table A4 shows that $|\delta P/P|$ is the highest. Such a variation of the matching quality with the

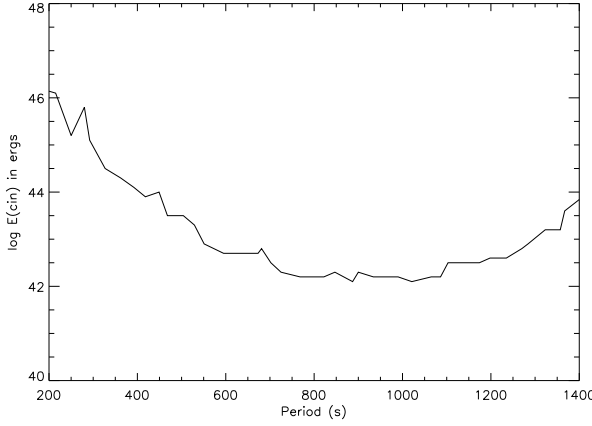


Figure A.6: $\log E_{kin}$ vs. P for $\ell=2$ modes for the best fitting model

amplitude of the modes could reveal how the pulsation spectrum of the g -modes driven by convection in the cool ZZ Ceti stars departs from the one predicted by the linear pulsation theory.

One of the predictions of the convection-driving mechanism is that the convection zone acts as a low-pass frequency filter (Goldreich & Wu, 1999a). Consequently, the ratio of the amplitudes of the oscillations at the photosphere and at the bottom of the convection zone is predicted to regularly decrease with increasing frequency for a given model. In HL Tau 76, power is observed on a large range of periods, from ≈ 380 s to ≈ 1400 s but with many gaps in the power spectrum where modes are missing. It can be wondered whether the modes are intrinsically missing or were not detected because their amplitudes were below the detection limit at the period of the observations. Nevertheless, DVK have gathered data on a long time scale including archival data. In spite of the fact that many of the modes in HL Tau 76 are variable in amplitude, there still remain domains in the power spectrum where the modes expected from the linear nonradial computations do not show up. This is more consistent with a description of the power spectrum in terms of a series of groups of unstable modes separated by regions of stable modes than with a continuous distribution of unstable modes. We looked for a possible selection mechanism which would favourably select the modes $\ell=1$ and $\ell=2$ which overlap in periods. We found that among the largest amplitude modes the dominant one at 541 s is close to the overlapping modes $\ell=1$, $k=8$ at 557.0 s and $\ell=2$, $k=16$

at 552.6 s; the second largest amplitude mode at 494 s is near to the overlapping modes $\ell=1$, $k=7$ at 499.0 s and $\ell=2$, $k=14$ at 500.0 s and finally the mode at 659.5 s to the overlapping modes $\ell=1$, $k=10$ at 651.8 s and $\ell=2$, $k=19$ at 648.2 s. But the other large amplitude modes do not coincide with overlapping modes. We conclude that there is no clear evidence that the overlapping $\ell=1$ and $\ell=2$ modes are favourably selected.

According to the previous discussion, we identified at least three possible explanations for the slight mismatch between observed and calculated periods: the first is related to the assumption of constant rotational splitting, the second to the effect of a weak magnetic field and the third is linked to the non-linear effects induced by the interaction with convection. All three may probably contribute to the difference between the observed periods and the periods calculated from the linear pulsation theory. One of the consequences resulting from the mismatch between observed and computed periods is that the identification of the ℓ value for the large amplitude modes could be uncertain: the frequency of a displaced large amplitude mode of degree $\ell=1$ could be closer to the frequency of a mode $\ell=2$ than to the frequency of a mode $\ell=1$ as estimated from the linear theory. Under these circumstances, one cannot exclude that some of the large amplitude modes identified as $\ell=2$ modes in Table A4 are in fact $\ell=1$ modes whose frequencies are affected by a strong interaction with convection. There are in Table A4 two particular features which need further discussion: the periods at 1065 s and at 781 s. Both were found by DVK as corresponding to linear combinations coinciding with a period predicted in the asymptotic regime. As a result, they suggested that they could be in fact real modes. While they could not distinguish between $\ell=1$ or $\ell=2$ for the 1065 s period, they identified the 781 s period with a $\ell=1$ mode. Our current results may be used to settle the ambiguous status of these two periods. We identify the 1065 s period with the mode $\ell=1$, $k=18$ and $m=0$ for which our model predicts this mode at 1059.2 s. It could have been also identified with the $m=-1$ in the same triplet, which would have given a better matching. However, the high amplitude peak (9.7 mma during XCOV18) at 1067.5 s, which we identify with this $m=-1$ component, would remain unidentified in that case. We also emphasize that, with our proposed identification, the two components of this triplet have the same $|\delta P|$ (5.8 s and 5.5 s respectively). We conclude that the period 1065 s should correspond to a

real mode and is one illustration of mode resonance as suggested by DVK.

The case of the 781 s period is different. The closest $\ell=1$ modes in our best fitting model are situated at 742.5 s and 801.6 s that is to say 38.5 s and 20.6 s away from the observed period respectively, while the closest $\ell=2$ modes are at 759.1 s and 798.7 s *i.e.* 21.9 s and 17.7 s away. Even by taking into account the rotational splitting, it is not possible to account for the 781 s by any component of these modes. We conclude that, in contrast with the 1065 s period, the 781 s pulsation is a linear combination and not a true mode.

The identifications proposed in Table A4 may be compared to the preliminary identifications by DVK for the degree of the modes. On the 36 modes listed in Table A4 we find that the identification of their ℓ degree agrees with ours for 16 modes, disagrees for 15 modes and that the identification proposed here lifts the ambiguous determination of ℓ in DVK regarding 5 modes. The fact that so many ℓ identifications disagree with the ones proposed in DVK is not surprising since we rely here on full calculations of the g -modes in realistic models while the preliminary identifications of DVK were based on a comparison of the observed periods with a period distribution following a constant period spacing. Kotak et al. (2002) obtained time dependent spectroscopy of HL Tau 76 from which they derived a number of frequencies in the velocity space. From the work of van Kerkwijk et al. (2000), they estimated the index R_v which measures the ratio of the amplitude in the power spectrum of the velocities and of the flux. This index is sensitive to the ℓ degree because the velocities and the flux are differently affected by geometrical average for different values of ℓ . The time dependent spectroscopic data analysed by Kotak et al. (2002) are short and cannot resolve the numerous close frequencies of HL Tau 76. The best derived R_v for the 541 s period is a 3σ confidence level determination. About the 5 remaining periods, the R_v index is measured with a lower confidence level. From the value of this index, Kotak et al. (2002) conclude that all the 6 modes they detect in HL Tau 76 are compatible with a $\ell=1$ degree. Provided that the mode at 781 s is excluded (since we argue it is a linear combination and not a true mode), our proposed identification disagrees for 4 out of the 5 remaining modes (for periods 382.5 s, 494.2 s, 541.0 s and 597.0 s) which we find as $\ell=2$ modes. Our identification for the pulsation with a period of 659.5 s as a $\ell=1$ mode agrees. However, as outlined above, the periods of these modes which

have the largest amplitudes may be affected by the interaction with convection and may slightly differ from the periods calculated following the linear theory like presented in the present work.

A.5 Conclusion

This paper has proved that it is possible to get tight constraints on the internal structure of the cool ZZ Ceti star HL Tau 76 by comparing the periods of g -modes from realistic models with the observed periods. Since HL Tau 76 exhibits about 40 independent modes of pulsation, it offers a unique opportunity to constrain the model and derive some of the main stellar parameters. We have computed a grid of DA white dwarf models representative of HL Tau 76 whose atmospheric parameters ($\log g$ and T_{eff}) are nicely constrained by spectroscopy. We computed the periods of the $\ell=1$ and $\ell=2$ nonradial g -modes in the models to be compared with the observations and used a χ^2 minimum algorithm to select the model which fits best the observations. Following this approach, we determined 3 parameters with good accuracy: the total stellar mass $M_* = 0.575 (\pm 0.005) M_\odot$, the hydrogen mass fraction $M(H) = 2.35 \times 10^{-4} M_*$, the helium mass fraction $M(He) = 10^{-2} M_*$. Our method based on χ^2 is not sensitive to the effective temperature in the range of T_{eff} deduced from spectroscopy for HL Tau 76. Nevertheless we find that the best fit is obtained with $T_{\text{eff}} = 11375$ K. Adiabatic calculations were carried out for the $\ell=1$ and $\ell=2$ pulsation modes for the best fitting candidate which delivers the periods for their $m=0$ component. We used the rotational splitting determined from observations (DVK) to estimate the periods for the components of the multiplets regarding the $\ell=1$ and the $\ell=2$ modes. We were then able to match almost all the observed peaks in the power spectrum of HL Tau 76 in terms of $\ell=1$ and $\ell=2$ modes split by rotation and to find their order k and azimuthal number m . The fitting process was satisfactory since we were capable of fitting 36 modes with an average precision of 0.7%. We found that the quality of the matching for individual modes seems to vary with the period and with the amplitude. The decreasing quality of the fit with the decreasing period could be due to the fact that the rotational splitting is not uniform in the star while we used a constant rotational splitting to calculate the periods. We stress that a weak magnetic field would induce a period mismatch increasing with period, in the opposite way to the one deduced from our fit.

Finally, the decreasing quality of the fit with increasing amplitude might be a signature of the nonlinear interaction between the convection and the pulsations. The identification of the large amplitude modes in terms of their ℓ value may be affected by this effect since we find many cases of overlapping periods for $\ell=1$ and $\ell=2$ modes. As a consequence, a $\ell=1$ mode, slightly shifted in frequency because of its interaction with convection, could be located closer to the period of a $\ell=2$ mode predicted by our linear adiabatic calculations and be misleadingly identified as a $\ell=2$ mode. The determination of the total mass and the estimate of the hydrogen mass fraction in DA white dwarfs are important issues because of the consequences of these parameters on the age determination of the white dwarfs on the cooling sequence and the potential use of the white dwarfs for cosmochronology, distance determination to globular clusters and so on. The asteroseismological study of HL Tau 76 presented in this paper gives reliable values for these two parameters.

It provides also with some hints on the impact of the convection driving mechanism on the pulsation period spectrum, which deserves more theoretical work.

Table A4. Most probable identification of the modes observed in HL Tau 76 spectrum

Computed period	ℓ degree	k order	m number	Observed period(s)	$ \overline{\delta P} $	$ \overline{\delta P}/P $ (%)
388.5 s	2	10	2	382.5 s	6.0 s	1.5
391.1 s	2	10	-2	394.3 s	3.2 s	0.8
445.8 s	2	12	-2	449.8 s	4.0 s	0.9
497.9 s	2	14	2	493.2 s	4.7 s	0.9
498.9 s	2	14	1	494.2 s	4.7 s	0.9
500.0 s	2	14	0	495.0 s	5.0 s	1.0
550.0 s	2	16	2	540.9 s - 541.0 s	9.0 s	1.6
551.3 s	2	16	1	541.8 s	9.5 s	1.7
552.6 s	2	16	0	542.4 s	10.2 s	1.8
590.6 s	2	17	-1	596.8 s - 597.0 s - 597.1 s	6.4 s	1.1
592.1 s	2	17	-2	598.6 s	6.5 s	1.1
627.1 s	2	18	-2	628.0 s	0.9 s	0.1
650.7 s	1	10	1	657.4 s	6.7 s	1.0
651.8 s	1	10	0	659.5 s - 660.1 s	8.0 s	1.2
652.9 s	1	10	-1	661.4 s - 661.9 s	8.8 s	1.3
667.6 s	2	20	2	662.3 s - 662.8 s	5.1 s	0.8
669.6 s	2	20	1	663.6 s - 664.2 s - 665.0 s	5.3 s	0.8
692.8 s	2	21	2	689.3 s	3.5 s	0.5
741.1 s	1	12	1	738.7 s	2.4 s	0.3
743.9 s	1	12	-1	748.5 s	4.6 s	0.6

Table A4 (continued). Most probable identification of the modes observed in HL Tau 76 spectrum

Computed period	ℓ degree	k order	m number	Observed period(s)	$ \overline{\delta P} $	$ \overline{\delta P}/P $ (%)
?	?	?	?	781.0 s	?	-
793.3 s	2	24	2	792.7 s - 794.1 s	0.1 s	0.0
796.0 s	2	24	1	796.4 s - 796.5 s	0.5 s	0.1
798.7 s	2	24	0	798.3 s - 799.1 s	0.0 s	0.0
929.9 s	2	29	0	930.6 s	0.7 s	0.1
933.6 s	2	29	-1	932.5 s - 933.2 s	0.8 s	0.1
964.1 s	2	30	-1	971.6 s	7.5 s	0.8
968.1 s	2	30	-2	974.4 s - 976.4 s	7.3 s	0.7
983.5 s	2	31	2	979.2 s	4.3 s	0.4
1056.7 s	2	33	-1	1060.2 s	3.5 s	0.3
1061.4 s	2	33	-2	1061.8 s	0.4 s	0.0
1059.2 s	1	18	0	1065.0 s	5.8 s	0.5
1062.01 s	1	18	-1	1067.5 s	5.5 s	0.5
1076.4 s	2	34	2	1070.8 s	5.6 s	0.5
1308.3 s	1	23	1	1308.7 s	0.4 s	0.0
1350.6 s	2	43	-1	1347.9 s - 1353.7 s	0.2 s	0.0
1391.2 s	2	45	0	1390.8 s	0.4 s	0.0

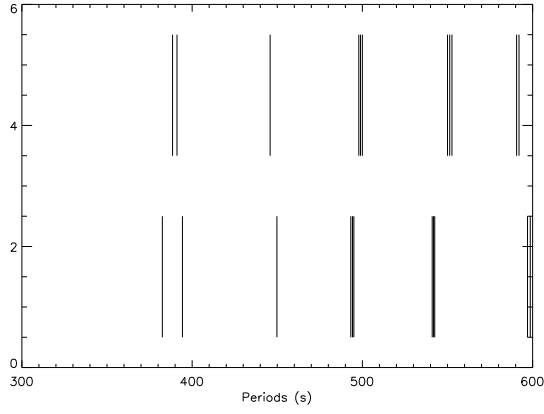


Figure A.7: *Computed vs. observed spectra for HL Tau 76 between 300 s and 600 s*

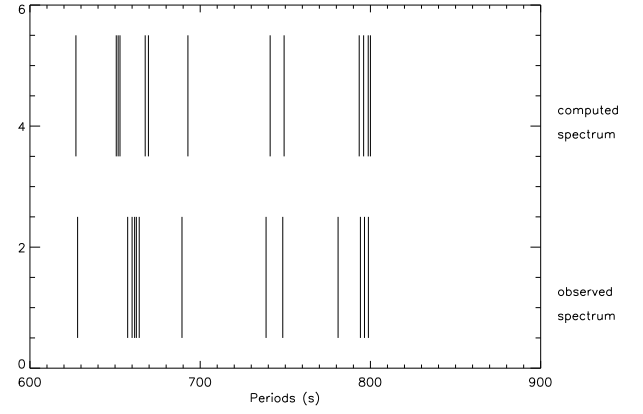


Figure A.9: *Computed vs. observed spectra for HL Tau 76 between 600 s and 900 s*

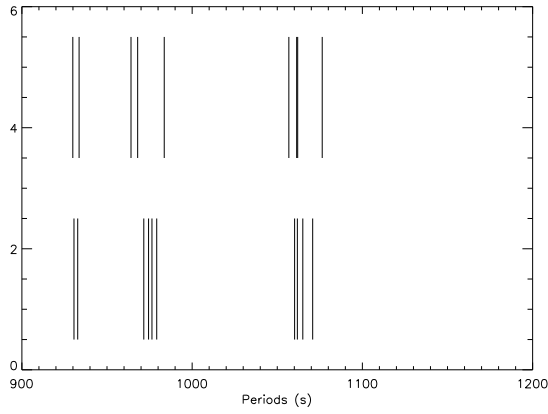


Figure A.8: *Computed vs. observed spectra for HL Tau 76 between 900 s and 1200 s*

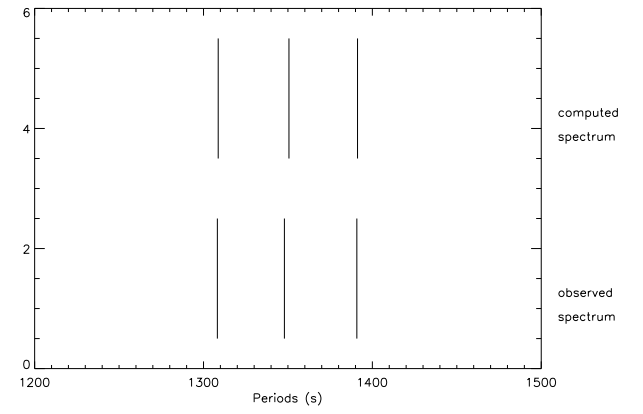


Figure A.10: *Computed vs. observed spectra for HL Tau 76 between 1200 s and 1500 s*

Annexe B

THE ZZ CETI STAR G 185-32 : A NEW INSIGHT BASED ON ASTEROSEISMOLOGY

D. Pech & G. Vauclair

Université Paul Sabatier, Observatoire Midi-Pyrénées, CNRS/UMR5572, 14 av. E. Belin, 31400 Toulouse, France

Abstract

The ZZ Ceti star G 185-32 has been observed in the visible range during the 8th WET campaign, in the UV and the far blue with the HST Faint Object Camera and through a time resolved spectrometry by a Keck telescope. These observational data allowed to point out many features regarding this star.

19 pulsations are detected in its frequency spectrum and one of them is strange: its amplitude does not vary with wavelength as linear theory suggests for $\ell=1$ or $\ell=2$ non-radial g modes. Furthermore this DAV star exhibits the shortest pulsations ever extracted from a ZZ Ceti power spectrum until now, with a 70.9 s, a 72.5 s and a 72.9 s periods respectively. In addition, many frequencies in the star spectrum are remarkable since they do verify typical relations, such as $f_3 = f_1 \pm f_2$, relevant to either linear combinations or true resonances.

Moreover, some closely spaced frequencies in the spectrum may reveal the signature of the rotational splitting effect.

Finally, the great brightness of this star allows to combine parallax and T_{eff} determination (from spectroscopy) to tighten the stellar mass evaluation.

As a consequence, this rich observational background incited us to model the star using an asteroseismological approach, to compute adiabatic $\ell=1$ and $\ell=2$ modes for the best fitting model so as to identify the observed pulsations and separate the linear combinations from the true resonances, then to evaluate the stellar rotation rate from the rotational splitting signature on the modes; we present at last a hypothesis to account for the peculiar behaviour of the 141.9 s mode's amplitude. A determination of the hydrogen and helium mass fractions is also suggested from the best fitting model computed for G 185-32.

B.1 Introduction

G 185-32 (also called PY Vul or WD1935+279) was discovered to pulsate as a ZZ Ceti (Mac Graw, 1981). PY Vul is especially one of the brightest known DAV star ($V=12.97$ mag) but exhibits numerous low amplitude pulsations.

By using the ML2, $\alpha=0.6$ version of the mixing length theory, Bergeron et al. (1995 & 2004) undertook a spectroscopic determination of its full mass and effective temperature: $M_\star = 0.64 (\pm 0.03) M_\odot$ and $T_{eff} = 12130 (\pm 200)$ K.

G 185-32 has been observed in 1992 during the 8th WET campaign (visible photometry), by Kepler et al. (2000) with the HST Faint Object Camera (UV and far blue photometry) and by Thompson et al. (2003) with a Keck telescope (time resolved spectrometry).

Castanheira et al. (2004) presented a preliminary study of G 185-32 based on WET and HST observations. They first exposed the data set related to the star then they commented on the pulsations by focusing on possible linear combinations in the frequency spectrum.

They also attempted the spherical degree (ℓ) determination for most of the observed periods by using the amplitude variation with wavelength as predicted by linear theory for $\ell=1$ and $\ell=2$ non-radial g modes and they concluded the peculiar 141.9 s period should be a factitious mode, likely the subharmonic of the 70.9 s periodicity, because its amplitude does not increase toward the UV as expected by g modes pulsation models (Robinson et al., 1982; Kepler, 1984; Robinson et al. 1995).

Since it only relies on pure observational aspects, this first study is not exhaustive and needs to be continued. Indeed, the periods Castanheira et al. indicate as possible linear combinations might be actually genuine modes involved in a true resonance while observational techniques fail at ruling on their nature.

In addition, this work does not consider the rotational splitting effect and thus it does not study the impact of stellar rotation on the observed modes.

On the other hand, the hypothesis Castanheira et al. put forward to explain the odd amplitude variation with wavelength concerning the 141.9 s period is unsure and remains unproved.

Thompson et al. (2004) did also report on the peculiar pulsations of PY Vul and focused notably on the 141.9 s period. Their study, however, leans only on observational techniques and most of the assertions they affirm can not be proved.

This context strongly suggests an independant sur-

vey, preferentially based on modeling, is the next step to derive the star features from asteroseismology.

In the second section, we call back the main observational data related to PY Vul. In the third one, we discuss our strategy to model the star in order to obtain a best fitting model. The fourth section proposes a first identification of the observed modes then treats of the matter of ambiguous frequencies; for each of them, we find out their true nature: linear combination or true mode. The fifth section deals with the rotational splitting effect and enables to complete the modes identification by taking the azimuthal number (m) into account. Finally, the sixth section is a long discussion in which we notably present a new hypothesis as an explanation for the 141.9 s singularity and the seventh section concludes the whole.

B.2 Observational background

Before entering the modeling process of G 185-32, it is necessary to regard first the observational data available for the star. The whole set of data is carefully exposed by Castanheira et al. (2004). We summarize the 19 periodicities detected in the frequency spectrum of this ZZ Ceti in Table B1.

The question mark signalizes periodicities that are marginally detected, only in the WET or in the HST sets (or, for the 285.1 s mode, only detected by Thompson & Clemens); the exclamation mark indicates the considered frequency does verify a typical relation that characterizes a linear combination (or a true resonance), so the mode is doubtful. The asterisk signals the enigmatic 141.9 s mode whose amplitude remains constant with wavelength.

Moreover, a first examination of Table B1 stresses G 185-32 pulsation spectrum seems to exhibit partial multiplets (induced by stellar rotation). As a matter of fact, the pairs of modes: 299.8 s, 301.4 s; 264.2 s, 266.2 s and 72.5 s, 72.9 s have periods close enough to be considered *a priori* as members of a same multiplet generated by rotational splitting.

Table B1. Detected periodicities in G 185-32 spectrum

Frequency (μHz)	Period (s)
1534.5	651.7
1783.3 (!)	560.8
1860.2 (?)	537.6
2199.9 (?)	454.6
2701.2	370.2
3317.8	301.4
3335.6	299.8
3507.5 (?)	285.1
3757.3	266.2
3785.2	264.2
4635.3	215.7
4698.8	212.8
5497.7 (?)	181.9
6736.1 (!)	148.5
7048.8 (*)	141.9
7080.4	141.2
13714.4	72.9
13784.9	72.5
14097.7 (!)	70.9

B.3 Modeling strategy

Pech, Vauclair and Dolez (2005, submitted), hereafter PVD, have shown how far it was possible to derive constraints on the internal structure of a DAV star from asteroseismology by building models and comparing the observed modes with the synthetic spectrum computed for each of them to isolate the best fitting candidate. The strategy was relying on a χ^2 test which indicates the candidate (in the full grid of computed models) that fits the star best. The strength of this method is to take all the observed modes into account (once removed the false ones that observational techniques point out as linear combinations) and the more the observed spectrum is rich and dense the more the method is efficient. Its major weakness in turn is to be sensible to a preliminary separation of modes according to their ℓ degree. Actually, if the identification of ℓ is unsure for many modes, the χ^2 algorithm may link computed and observed modes with different degrees and result in a wrong fitting model. However, if the star exhibits a great deal of modes, some errors in the determination of ℓ (due to observational uncertainties) are allowed and do not threaten the reliability of the best candidate.

G 185-32 shows only a small amount of modes (19 periodicities) thus the χ^2 method is risky. It is even

all the more hazardous that some of them (at least three) are suspected to be false modes (linear combinations). That is why we decided to put another strategy into practice.

B.3.1 A reference mode

First of all, we considered a reference mode in the frequency spectrum for which the identification is secure: the 72.5 s period.¹

Since modes with degree $\ell \geq 3$ are unlikely to be observed (because of geometrical effect), the expected value for the degree of this mode is either $\ell=1$ or $\ell=2$. Nonetheless, either $\ell=1, k \geq 1$ or $\ell=2, k \geq 2$ would imply the mass of G 185-32 is close to the Chandrasekar limit, which firmly disagrees with the observations. As a consequence, the 72.5 s period is necessarily the $\ell=2, k=1$ mode. Modeling will confirm later this conclusion.

However, Castanheira et al. (2004) did consider the $\ell=2, k=1$ mode was the 70.9 s period (and not the 72.5 s one) and their analysis relies on this hypothesis.

B.3.2 Determining potential solutions in the $\log q(H)$ vs M_\star plane

Once the reference mode selected, the principle was to determine potential solutions in the $\log q(H)$ vs M_\star plane²: the hydrogen mass fraction was adjusted according to the stellar mass that scanned all the range allowed by spectroscopy (that is to say from $0.61 M_\odot$ up to $0.67 M_\odot$).

The stellar core was considered as a pure, degenerate carbon one; the effect of stellar rotation (differential or not) on the stellar structure neglected and the ML2 version with $\alpha=0.6$ was chosen for the version of the mixing length theory.

The remaining free parameters were also kept constant because they do not influence the fundamental ($\ell=2, k=1$) mode enough to alter sensibly its period. Indeed, on the one hand, Brassard et al. (1992) proved the pulsation modes are almost insensitive to the helium mass fraction thus this parameter can be ignored confidently.

¹we had actually 3 periodicities at choice: 70.9 s, 72.5 s and 72.9 s. But because we do not consider the stellar rotation at this stage of the procedure, the most central (72.5 s) was considered as the most judicious because it is likely to hold the lowest value of m among the three.

²that is to say a series of couples ($\log q(H)$, M_\star) for which the resulting model presents the $\ell=2, k=1$ mode with a period of 72.5 s (± 0.7 s).

On the other hand, the impact of the effective temperature has been analysed. We built up 8 models with M_* close to the one of G 185-32 as deduced from observations. These models have $M_* = 0.62 M_\odot$, $q(H) = 10^{-4}$ and $q(He) = 10^{-2}$. Their T_{eff} scanned the spectroscopic range (from 11930 K to 12330 K) and, for each model, the adiabatic $\ell=2$, $k=1$ then $\ell=2$, $k=10$ modes were computed. Table B2 compares the periods of these modes and confirms they remain almost alike when T_{eff} varies: the period of the $\ell=2$, $k=10$ mode slightly increases when T_{eff} lowers while the period of the $\ell=2$, $k=1$ mode stays constant. This trend is very important because the validity of the possible solutions in the $\log q(H)$ vs M_* plane strongly depends on the constancy of the period of the $\ell=2$, $k=1$ mode. So, Table B2 guarantees considering T_{eff} as a degenerate parameter in a first approach is not hazardous. The spectroscopic range for M_* was covered with a step of $0.005 M_\odot$ from $0.610 M_\odot$ to $0.670 M_\odot$ and $q(H)$ was fit for each model to keep the fundamental mode with a period of 72.5 s ($\pm 1\%$). T_{eff} was fixed at 12130 K and $q(He)$ at 10^{-2} .

Then we tried a rough identification of the modes in G 185-32 spectrum from the adiabatic spectra calculated for each model we built. Table B3 summarizes M_* , $\log q(H)$, the number of correctly identified modes and the respective σ for each of the 13 models.

Table B3 shows that the model with $M_* = 0.640 M_\odot$ and $q(H) = 1.62 \times 10^{-4}$ holds the spectrum which fits the observed modes with the best accuracy (lowest deviation) and, moreover, it is one of them that identify the highest number of observed modes (13). Consequently, the mass of G 185-32 on the one hand and its hydrogen mass fraction on the other hand should be close to this couple of values. The process has now to complete by performing a fine determination of these two parameters around this pair of values.

B.3.3 Fine determination of M_* and $q(H)$. Estimation of T_{eff}

We built a second, sharper grid of models by varying the full mass around $0.640 M_\odot$ (with a variation step of $0.002 M_\odot$ between two consecutive models) then adjusting the H mass fraction accordingly to conserve the period of the reference mode constant. The T_{eff} was still maintained at 12130 K. The best adjustment possible with the observed spectrum of PY Vul was found for the couple $M_* = 0.638 (\pm 0.007) M_\odot$ and $q(H) = 1.70 (\pm 0.10) \times 10^{-4}$.

Table B2. Impact of the variation of T_{eff} on the $\ell=2$, $k=1$ then on the $\ell=2$, $k=10$ modes

T_{eff} (K)	Period of the $\ell=2$, $k=1$ mode (s)	Period of the $\ell=2$, $k=10$ mode (s)
11950	79.9	379.3
12020	79.9	378.8
12080	79.8	376.9
12150	79.8	373.2
12210	79.8	370.8
12270	79.8	367.3
12320	79.7	365.4

Table B3. Potential solutions in the $\log q(H)$ vs. M_* plane derived from the reference mode with T_{eff} and $q(He)$ constant

Stellar mass (M_*/M_\odot)	H mass fraction $\log q(H)$	Identified modes	σ (s)
0.610	-3.62	10	4.8
0.615	-3.66	11	4.5
0.620	-3.74	11	4.2
0.625	-3.72	12	3.9
0.630	-3.74	13	3.4
0.635	-3.76	13	3.0
0.640	-3.79	13	2.8
0.645	-3.82	13	3.1
0.650	-3.86	13	3.3
0.655	-3.88	12	3.6
0.660	-3.91	12	3.8
0.665	-3.95	12	3.8
0.670	-3.96	10	3.7

The uncertainty on M_* represents the minimum divergence on the mass (from the central value $0.638 M_\odot$) necessary to increase the deviation σ of the resulting model by 10 %. The uncertainty related to $q(H)$ corresponds to the minimum divergence (from the central value 1.70×10^{-4}) necessary to exceed the 1 % tolerance allowed on the reference period, that is to say to get a model with $M_* = 0.638 M_\odot$ for which the computed $\ell=2$, $k=1$ mode has a period lower than 71.8 s or higher than 73.2 s.

This parametrizing underlines the initial choice for the He layer thickness was optimal since such a thick hydrogen envelope does imply a He layer mass close to $10^{-2} M_*$. The last free parameter to constrain is T_{eff} , that covers the spectroscopic interval (11930 K-12330 K) with a variation step of 40 K. The deviation is evaluated for each model (with $M_* = 0.638 M_\odot$ and $q(H) = 1.70 \times 10^{-4}$). The impact of T_{eff} on the pulsations behaviour is very

weak. However, the value of σ indicates that the model with $T_{eff} = 12280$ K seems to be the most pertinent but a divergence of 80 K around this value is compulsory to produce a detectable shift on the pulsation modes. As a result, we should consider that the most probable effective temperature must be $T_{eff} = 12280 (\pm 80)$ K.

This best fitting model then presents $\sigma = 2.7$ s, with a relative error of 1.0 % (out of the 15 identified modes).

The determination of the structural parameters is now finished and it is possible to focus now on the features of the model our strategy placed as the best one to represent G 185-32.

B.3.4 Featuring the best fitting model for G 185-32

The process we followed to model G 185-32 resulted in the determination of its main structural features: its full mass M_* , its H and He mass fractions, its T_{eff} . Its radius and luminosity may also be derived from the former quantities. All these parameters are summarized in Table B4.

Moreover, we computed the adiabatic $\ell=1$ then $\ell=2$ pulsation modes for this best model on a periods domain which surrounds the range of the observed modes. The $\ell=1$ modes are reported in Table B5 and the $\ell=2$ modes are listed in Table B6.

B.4 Preliminary study of the observed modes of G 185-32

B.4.1 First identification of the modes

Adiabatic $\ell=1$ and $\ell=2$ modes computed for the best fitting model enable to perform a first identification of the observed pulsations and make it possible to distinguish for some ambiguous periodicities whether they are true modes or linear combinations. In this task, we do not consider the impact of the stellar rotation on the pulsation spectrum of the DAV star.

Table B7 presents 6 columns: the first expresses the observed periods, the second one the spherical degree (ℓ) of the mode, the third its radial order (k), the fourth the value of the corresponding period computed from the model, the fifth translates the absolute difference between the two periods ($|\delta P|$) and finally the sixth gives the relative difference ($|\delta P/P|$). The deviation for this preliminary identification is $\sigma = 2.7$ s and the average relative difference is $|\delta P/P| = 1.0\%$.

Table B4. Structural parameters for the best fitting model

Stellar mass	$M_* = 0.638 (\pm 0.007) M_\odot$
Effective temperature	$T_{eff} = 12280 (\pm 80) \text{ K}$
Hydrogen layer mass	$M(H) = 1.70 (\pm 0.10) \times 10^{-4} M_*$
Helium layer mass	$M(He) = 10^{-2} M_*$
Luminosity	$L = 0.00461 L_\odot$
Stellar radius	$R = 0.01531 R_\odot$

Table B5. $\ell=1$ modes for the best fitting model

k	Period (s)	k	Period (s)
1	124.6	7	461.5
2	244.0	8	505.1
3	281.2	9	533.7
4	322.0	10	589.8
5	364.3	11	637.5
6	397.0	12	680.2

Table B6. $\ell=2$ modes for the best fitting model

k	Period (s)	k	Period (s)
1	72.0	13	431.5
2	142.1	14	455.2
3	163.4	15	474.2
4	194.3	16	508.8
5	224.2	17	542.1
6	240.1	18	559.6
7	269.3	19	587.6
8	300.7	20	605.0
9	326.4	21	633.8
10	346.2	22	672.3
11	374.2	23	698.6
12	397.0	24	712.2

These two indicators reveal a satisfactory fitting between observed and computed spectra. This fitting will be later refined and improved when the azimuthal number m will be taken into account.

B.4.2 Linear combinations or true resonances?

The preliminary identification provided by Table B7 enables to find out the real nature of some suspect modes whose frequencies indicate they may be linear combinations of parent modes. Some observed periodicities can not be recognized by the synthetic spectrum of the model, which implies they should be actually false modes.

First of all, let us have a look on the mysterious 141.9 s period. Despite its strangeness, the model spectrum presents the $\ell=2, k=2$ mode with a period of 142.1 s, which suggests the pair (141.2 s, 141.9 s) is a part of the quintuplet generated by the $\ell=2, k=2$ mode split by rotation. Accordingly, the 141.9 s is a true mode and the 70.9 s should be consequently its harmonic, thus a false mode ($f_{70.9s} = 2 \times f_{141.9s}$ with $|\Delta f| = |f_{obs} - f_{comb}| = 0.05 \mu\text{Hz}$; f_{obs} is the observed frequency and f_{comb} the computed frequency).

The 148.5 s period is unidentified in Table B7. This confirms that period is a linear combination satisfying the relation: $f_{148.5s} = f_{72.5s} - f_{141.9s}$, as envisaged by Castanheira et al. (2004).

Now, let us consider the 181.9 s pulsation. Not only this period is marginally detected (solely present in the HST data set) but it appears with a low S/N ratio (about 3.6), close to the detection limit Castanheira et al. (2004) fixed at $3.3 < A >$. With a more conservative detection level (placed at $4 < A >$ for instance), this pulsation would have remained unnoticed and regarded as noise. As a consequence, it is not surprising the synthetic spectrum derived from our model fails at reproducing this period and we conclude confidently the 181.9 s is not a true pulsation mode.

We also underline the 651.7 s might also be a linear combination since $f_{651.7s} = f_{301.4s} - f_{560.8s}$ with $|\Delta f| = 0.00 \mu\text{Hz}$ (Castanheira et al. noted the possibility of a potential linear combination they expressed as $f_{560.8s} = f_{301.4s} - f_{651.7s}$). Indeed, the 651.7 s period was not recognized in Table B7 but, when the rotational splitting effect is integrated in the matching process, this pulsation is identified by the synthetic spectrum of the model. In addition, if we look at the amplitudes of these 3 pulsations in the 3 data sets available (WET, HST UV and HST far blue), we remark that the 560.8 s is undetected for WET (these partial data would consequently suggest there are 2 real modes: the 301.4 s and the 651.7 s periods); if HST alone is examined, the 651.7 s period may be seen as a linear combination (since this pulsation has the smallest amplitude

in the far blue and in the UV). The compatibility between these two partial examinations is therefore ensured if we consider all the modes are real. Moreover, the 3 periods are correctly reproduced by the spectrum of our model. Accordingly, one can affirm confidently that the three pulsations are an illustration of a true resonance.

Furthermore, the 301.4 s mode is suspected to form a partial multiplet with the 299.8 s mode.

The 212.8 s periodicity deserves also a close examination. Table B7 reveals a poor identification for this pulsation (it can not be approached by our model spectrum better than a dozen of seconds away). This firmly suggests that period should be a false mode (that is to say a linear combination). At first sight, the observed pulsations of G 185-32 (properly recognized by our model as true modes) are unable to express this pulsation as resulting from a combination of parent modes. Nonetheless, Table B5 and Table B6 show there is a perfect coincidence between the $\ell=1, k=6$ mode and the $\ell=2, k=12$ mode that pulsate simultaneously at a period of 397.0 s (with an uncertainty probably close to 0.5 s due to modeling internal errors). One can infer that this beat is not detected in the observations certainly because the 2 pulsations must have been in a situation of destructive interference during the observational campaigns. However, this double 397.0 s period, although masked when the star was observed, can be seen as truly excited modes able to generate a linear combination with another parent mode. On the other hand, we note that $f_{212.8s} = f_{454.6s} + f_{\sim 397.0s}$ with $|\Delta f| \sim 20.0 \mu\text{Hz}$. This value of $|\Delta f|$ is coherent with the internal uncertainties involved by the modeling process and the modes calculation. The impossibility to match properly this period with a computed mode on the one hand and the possibility to account for it as a linear combination involved by a beat phenomenon on the other hand strongly plead in favour of the false mode issue.

As a conclusion, this first modes identification allows to consider that the 70.9 s, 148.5 s, 181.9 s and 212.8 s periodicities are false modes.

B.5 The stellar rotation rate and its signature on the pulsation modes

B.5.1 Evaluation of the rotational splitting effect on the observed modes

Some modes in the pulsation spectrum of G 185-32 make it possible to estimate the rotational splitting

Table B7. Preliminary identification of the modes observed in PY Vul spectrum

Observed period	degree ℓ	order k	Computed period	$ \delta P $	$ \delta P/P $ (%)
70.9 s	?	?	?	?	?
72.5 s	2	1	72.0 s	0.5 s	0.7
72.9 s	2	1			
141.2 s	2	2			
141.9 s	2	2	142.1 s	0.2 s	0.1
148.5 s	?	?	?	?	?
181.9 s	?	?	?	?	?
212.8 s	2	5			
215.7 s	2	5	224.2 s	8.5 s	3.8
264.2 s	2	7			
266.2 s	2	7	269.3 s	3.1 s	1.2
285.1 s	1	3	281.2 s	3.9 s	1.4
299.8 s	2	8			
301.4 s	2	8	300.7 s	0.7 s	0.2
370.2 s	2	11	374.2 s	4.0 s	1.1
454.6 s	2	14	455.2 s	0.6 s	0.1
537.6 s	1	9	533.7 s	3.9 s	0.7
560.8 s	2	18	559.6 s	1.2 s	0.2
651.7 s	?	?	?	?	?

effect and to derive the rotation rate of the star. Indeed, there are in the spectrum many pairs of modes whose periods are close enough to reveal they must come from a same multiplet induced by stellar rotation. Moreover, adiabatic calculations for $\ell=1$ and $\ell=2$ modes on the range of periods observed in the spectrum of PY Vul indicate, at the level of these couples of periods, there is no coincidence in the synthetic spectrum between modes with different spherical degrees and thus confirm these pairs of modes really stand for a partial multiplet. The previous analysis on the linear combinations present in the observational data enables to keep as probable partial multiplets (all with degree $\ell=2$) the following couples: A(299.8 s, 301.4 s), B(264.2 s, 266.2 s), C(141.2 s, 141.9 s) and finally D(72.5 s, 72.9 s). A certain weakness regarding these values is that all the modes have short periods (thus high frequencies), which implies the rotational splitting determination might stay rather approximative.

On the other hand, we admit the rotation does affect all the modes uniformly, whatever their period range. Actually, this simplifying hypothesis is not risky since it is proved a differential rotation, when it does happen, has always weak and often negligible impact on the pulsation periods.

As to get an estimation of the rotational splitting effect on the modes, one will consider the frequency shift that regards the 4 pairs of $\ell=2$ modes we have just pointed out above.

As for the couple A, we get $\Delta f_A=17.8 \mu\text{Hz}$, as for B: $\Delta f_B=27.9 \mu\text{Hz}$, as for C: $\Delta f_C=31.6 \mu\text{Hz}$ and as for D: $\Delta f_D=70.5 \mu\text{Hz}$. Besides, $\Delta f_A=|\Delta m|_A \times \delta f_{\ell=2}$, $\Delta f_B=|\Delta m|_B \times \delta f_{\ell=2}$ and $\Delta f_C=|\Delta m|_C \times \delta f_{\ell=2}$ ³ within the asymptotic limit.

The asymptotic regime in turn is not verified for the pair D (its radial order is too low: $k=1$).

As $\Delta f_B \sim \Delta f_C \sim 2 \times \Delta f_A$, the possible solutions for $|\Delta m|$ are:

- either $|\Delta m_A|=1$ and $|\Delta m_B| = |\Delta m_C|= 2$, which involves a frequency shift for the $\ell=2$ modes: $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$
- or $|\Delta m_A|=2$ and $|\Delta m_B| = |\Delta m_C|= 4$, which implies a frequency shift for the $\ell=2$ modes such as: $\delta f_{\ell=2} \sim 8 \mu\text{Hz}$.

The couple D removes the indetermination because $|\Delta m_D|= \Delta f_D/\delta f_{\ell=2}$.

A value for $\delta f_{\ell=2}$ close to $8 \mu\text{Hz}$ must be rejected because it would involve $|\Delta m_D| \sim 9$ (i.e. $|\Delta m_D| > 4$). In turn, if the first possibility is envisaged, with $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$, then $|\Delta m_{D \text{ th}}|= 4.4$ ($|\Delta m_{D \text{ th}}|$ translates the theoretical value of $|\Delta m_D|$ as given by the asymptotic limit).

As the properties of this approximation are not valid for this doublet (with $k=1$), one actually has:

$C_{1,2 \text{ real}} < C_{1,2 \text{ th}}$ thus $|\Delta m_{D \text{ real}}| < |\Delta m_{D \text{ th}}|$ and one deduces that $|\Delta m_{D \text{ real}}|= 4$.

Likewise, there is finally one single possible solution for the frequency shift of the $\ell=2$ modes to comply the frequency differences detected among the 4 partial quintuplets observed in the spectrum of G 185-32: $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$.

B.5.2 Stellar rotation rate and further remarks

It is possible to take advantage from the evaluation of the frequency shift for the $\ell=2$ modes.

³According to theory, the asymptotic regime may not be verified for the couple C ($k=2$) but the asymptotic relation $\Delta f_C=|\Delta m|_C \times \delta f_{\ell=2}$ appears surprisingly well satisfied.

First of all, we may derive the frequency shift for the $\ell=1$ modes since $\delta f_{\ell=1} = 0.6 \times \delta f_{\ell=2}$ (within the asymptotic limit). Accordingly, $\delta f_{\ell=1} \sim 10 \mu\text{Hz}$. The quantity $\delta f_{\ell=1}$ will be used to complete the identification of the observed periods (determination of the azimuthal number m) that our model spectrum recognizes as $\ell=1$ modes.

The rotation rate

The value derived for $\delta f_{\ell=2}$ induces G 185-32 does rotate with a period close to 14.5 hr. This rotation rate is similar for G 226-29 (about 9 hr) for which $\delta f_{\ell=1}=16.15 \mu\text{Hz}$ (Kepler et al., 1995). Dolez et al. (2005) derived for HL Tau 76 a value of $\delta f_{\ell=2}=4.23 \mu\text{Hz}$ therefore G185-32 rotates about 4 times faster than HL Tau 76 does.

The 70.9 s period

As for the couple D, the value of $|\Delta m|_D$ ($|\Delta m|_D = 4$) confirms the 70.9 s periodicity can not belong to the quintuplet generated by the $\ell=2, k=1$ mode. In addition, the frequency difference between the 70.9 s period and the next one (72.5 s) is $313 \mu\text{Hz}$ that is to say about 20 times the value of $\delta f_{\ell=2}$. This fact formally prohibits that the 2 periods (70.9 s and 72.5 s) might pertain to the same multiplet and reinforces the hypothesis the 70.9 s pulsation should be the harmonic of the 141.9 s mode (with the relation: $f_{70.9s} = 2 \times f_{141.9s}$).

The 651.7 s period

Table B7 could not identify the 651.7 s period at once. By taking now the value of the frequency shift $\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$ into account, it becomes possible to assert it is the $\ell=2, k=21, m=-2$ mode with a computed period of 646.9 s (which involves a relative error as low as 0.7 %), from Table B6 that gives the $\ell=2, k=21$ (and $m=0$) mode at 633.8 s.

The 299.8 s and 301.4 s periods

Castanheira et al. (2004) consider the 299.8 s and 301.4 s periods are $\ell=1$ modes. Our analysis offers an alternative identification. Actually, our model spectrum can only match these pulsations with the $\ell=2, k=8$ mode (with a period at 300.7 s). The couple (299.8 s, 301.4 s) is besides equidistant from the surrounding computed $\ell=1$ modes ($\ell=1, k=3$ mode at 281.2 s and $\ell=1, k=4$ mode at 322.0 s). This confirms the 299.8 s and 301.4 s periods must be $\ell=2$ modes.

B.5.3 Complete identification of the observed modes of G 185-32

The evaluation of the frequency shift for the $\ell=2$ modes is also valuable to improve the former identification of the periods presented in Table B7 and allows to introduce the azimuthal number (m) value. When several interpretations were possible for some given pulsations (that is to say when two distinct modes with a different ℓ degree were eligible to match the observed period), we selected the solution that resulted in the least relative (and absolute) error. Regarding the partial multiplets, the number m was chosen so as to induce the most constant value of $|\delta P/P|$ within the pair of them.

Taking the rotational splitting into account improves the quality of the overall fitting because the deviation lowers to $\sigma=1.8$ s and the average relative error diminishes to 0.7 % on the one hand and involves the successful identification of a further mode (the 651.7 s period) on the other hand.

Table B8 provides the complete identification of the modes detected in G 185-32 spectrum.

Fig. B1 and Fig. B2 express graphically the matching between observed and computed spectra, the false modes are plotted in dotted line and the real ones in full line.

B.6 Discussion

The strategy we used to constrain the internal structure of the ZZ Ceti star PY Vul, relying on the study of its pulsation modes, resulted in building a best fitting model. This model allowed to derive its main structural parameters (full mass M_* , H and He mass fractions, T_{eff} , radius and luminosity). Then we could identify confidently the nature of the periodicities detected in the spectrum of the star (real or false modes) and, for the true ones, we were able to deduce their degree, order and azimuthal number, especially thanks to the signature of the rotational splitting effect involved by stellar rotation.

These results may be compared to the former papers on G 185-32 (Castanheira et al., 2004; Thompson et al., 2004).

B.6.1 On the determination of the spherical degree of the modes

Castanheira et al. (2004) attempted to find out the value of ℓ for 14 modes observed in the spectrum of G 185-32 from the variation of their respective amplitude according to wavelength.

For the ones our analysis considers as true modes,

one derives sometimes a contradictory result for the ℓ value. Indeed, our conclusion agrees with Castanheira et al.'s determination for the 72.5 s, 72.9 s, 215.7 s, 264.2 s, 266.2 s and 651.7 s modes but disagrees for the 299.8 s, 301.4 s, 370.2 s, 454.6 s, 560.8 s periods. Nevertheless, this contradiction is not absolute: the (theoretical) amplitude difference in the UV (HST data) between $\ell=1$ and $\ell=2$ modes is similar to the error bar on a mode amplitude according to the wavelength (Castanheira et al., 2004); consequently, deducing ℓ with this observational method is unsure and the results this technique involves do not contradict firmly our conclusions.

Besides, it is possible to moderate these precedent contradictions for some cases.

Ambiguous identifications

Adiabatic $\ell=1$ and $\ell=2$ modes computed from our model suggest two possible identifications for 2 pulsations in the set of observed modes: the 370.2 s and the 454.6 s periods.

The 370.2 s mode may be:

- either the $\ell=2$, $k=11$ and $m=-2$ mode, which corresponds to a computed mode with a period of 369.8 s and involves a relative error $|\delta P/P| = 0.1$ %
- or the $\ell=1$, $k=5$ and $m=-1$ mode, which induces a computed mode with a period of 365.6 s and translates a relative error $|\delta P/P| = 1.2$ %.

Our selection criterium implies that the identification which results in the minimum relative error must be considered as the best possible, so we retained the first possibility. Nonetheless, the second solution is still satisfactory, although less pertinent, and offers a ℓ identification in accordance with Castanheira et al.'s statement.

In a similar manner, the 454.6 s mode suggests a double solution because it can be:

- either the $\ell=2$, $k=14$ and $m=0$ mode, that corresponds to a computed period of 455.2 s and thus gives a relative error $|\delta P/P| = 0.1$ %
- or the $\ell=1$, $k=7$, $m=1$ mode, with a computed period of 459.4 s and a relative error of $|\delta P/P| = 1.1$ %.

Once again, the first identification seems to be the most probable while the second solution (that suggests a ℓ value similar to the one proposed by Castanheira et al.) can not be absolutely rejected.

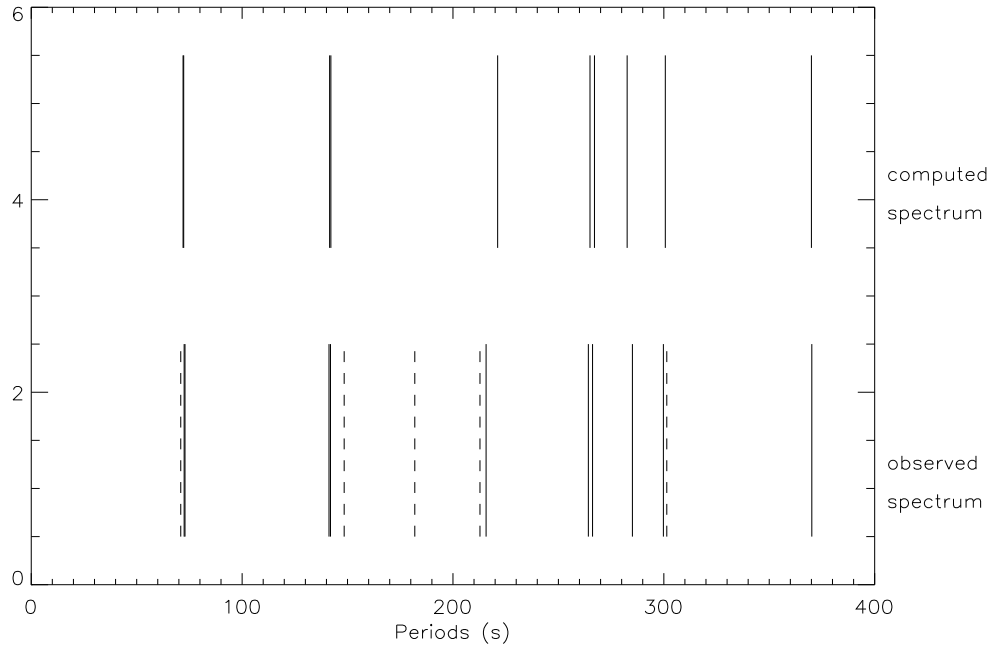


Figure B.1: *Observed vs. computed spectra between 0 s and 400 s for G 185-32*

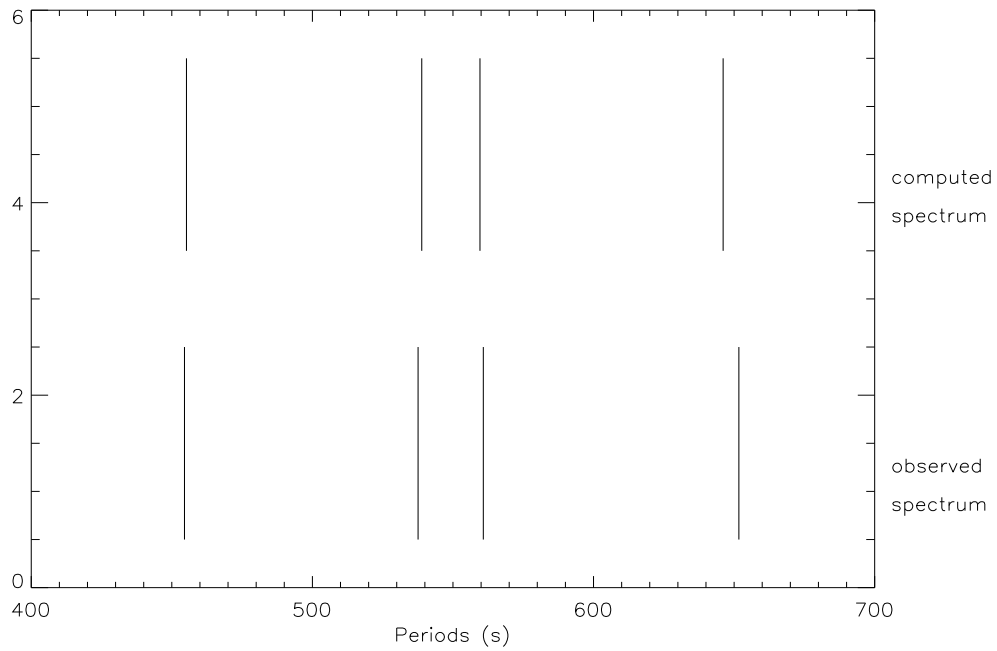


Figure B.2: *Observed vs. computed spectra between 400 s and 700 s for G 185-32*

Table B8. Full identification of the observed modes in G 185-32 spectrum

Observed period	degree ℓ	order k	number m	computed period	$ \delta P $	$ \delta P/P $ (%)
72.5 s	2	1	2	71.8 s	0.7 s	1.0
72.9 s	2	1	-2	72.2 s	0.7 s	1.0
141.2 s	2	2	2	141.5 s	0.3 s	0.2
141.9 s	2	2	0	142.1 s	0.2 s	0.1
215.7 s	2	5	2	222.6 s	6.9 s	3.2
264.2 s	2	7	2	267.0 s	2.8 s	1.1
266.2 s	2	7	0	269.3 s	3.1 s	1.2
285.1 s	1	3	-1	282.0 s	3.1 s	1.1
299.8 s	2	8	1	299.3 s	0.5 s	0.2
301.4 s	2	8	0	300.7 s	0.7 s	0.2
370.2 s	2	11	2	369.8 s	0.4 s	0.1
454.6 s	2	14	0	455.2 s	0.6 s	0.1
537.6 s	1	9	-1	536.6 s	1.0 s	0.2
560.8 s	2	18	0	559.6 s	1.2 s	0.2
651.7 s	2	21	-2	646.9 s	4.8 s	0.7

The couple of periods 212.8 s and 215.7 s

Castanheira et al. (2004) do consider the 212.8 s periodicity is a $\ell=1$ mode and the 215.7 s one is a $\ell=2$ mode.

However, Table B7 reveals the matching of these periods is mediocre ($|\delta P| \sim 9$ s and $|\delta P/P| \sim 4$ %), especially for the 212.8 s pulsation, and this couple of periods contrasts with the other modes that are fit with high accuracy ($|\delta P/P| \leq 1.2$ % for the rest of the spectrum). This discrepancy suggests at least one of the two problematic periods may be a false mode. Considering the beat that occurs, according to our model spectrum, for a period very close to 397.0 s, we could conclude that the 212.8 s is the result of a linear combination whose parent modes are the period at 397.0 s and the 454.6 s pulsation. In addition, the inability for the synthetic spectrum of the model to recognize this pulsation strengthens this hypothesis. Provided that the 212.8 s pulsation is a factitious mode, the ℓ value Castanheira et al. assign to this periodicity is no longer conflicting because the matter of the ℓ value is now vain.

In turn, the 215.7 s period does not seem to result from a linear combination. That is why we consider this pulsation is a real mode and we are henceforth able to state it is the $\ell=2$, $k=5$ and $m=2$ mode (thus corresponding to a computed period of 222.6 s). This last identification does result in an absolute error $|\delta P|= 6.9$ s and a relative difference $|\delta P/P|= 3.2$ %; this fit is sensibly better than it was in Table B7 but stays poorer than all the other matchings however. On the other hand, Castanheira et al. (2004) derive the same value for this mode ($\ell=2$), in accordance with our result.

The couple of periods 299.8 s and 301.4 s

We formerly justified why the pair of periods (299.8 s, 301.4 s) should be considered as $\ell=2$ modes then we mentioned the matching of this couple of modes revealed a very small relative error ($|\delta P/P| = 0.2\%$). Castanheira et al. assert these pulsations are $\ell=1$ modes. So, there is an apparent disagreement between our and their conclusions.

As a result, the actual disagreements on the determination of the spherical degree ℓ between Castanheira et al.'s method and our analysis only occur for the couple of modes 299.8 s and 301.4 s.

B.6.2 The peculiar 141.9 s mode

Among the various singularities detected in the spectrum of PY Vul, the most remarkable is surely the 141.9 s periodicity whose amplitude does not vary with wavelength, contrary to what is expected from theory for $\ell=1$ or $\ell=2$ non-radial g modes. Several scenarios have been put forward to explain this phenomenon.

Castanheira et al. (2004) consider this atypical behaviour is the signature of a non-linear effect and thus the 141.9 s periodicity is not a true pulsation mode, which implies the 70.9 s period is in turn a real mode. This last assertion contradicts our analysis. In addition, considering that the 70.9 s pulsation on the one hand and the pair of periods (72.5 s, 72.9 s) on the other hand are all genuine modes is problematical. Indeed, if the three pulsations are real, either they all belong to the same multiplet generated by rotation or the 70.9 s period and the couple (72.5 s, 72.9 s) are distinct modes with different ℓ degrees ($\ell=1$ and $\ell=2$). The value we derived for the frequency shift ($\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$) excludes the first possibility. The frequency difference between the 70.9 s period and the 72.5 s one is by far too large to be compatible with $\delta f_{\ell=2}$. Since the 72.5 s and 72.9 s periods are identified as components of a $\ell=2$ mode, the 70.9 s pulsation must be a $\ell=1$ (and obviously $k=1$) mode following the second alternative (if one excludes the possibility with $\ell \geq 3$ because of geometrical cancellation effect). This second hypothesis would involve G 185-32 has a full mass close to the Chandrasekhar limit since only such a very massive ZZ Ceti star can exhibit a $\ell=1$, $k=1$ mode with a so short period; this absolutely disagrees with the observations that rely on parallax and spectroscopy to derive a stellar mass near $0.64 M_{\odot}$. As a result, the hypothesis that the 141.9 s mode is factitious (and the 70.9 s real consequently) appears very doubtful.

Thompson et al. (2004) do not exclude that the 141.9 s period is a genuine mode but they state it is a $\ell=4$ non radial g mode. As a matter of fact, linear theory predicts that the amplitude for $\ell=4$ g modes does not vary significantly with wavelength from UV to visible, which is precisely observed for the 141.9 s pulsation. However, Thompson et al. (2004) did not confirm their assumption by building models and computing non-radial g modes to check whether a suitable $\ell=4$ mode could match the observed 141.9 s pulsation on the one hand and, on the other hand, it is strongly established that the visibility of a non radial g mode decreases when its spherical degree increases. Accordingly, no mode with $\ell > 2$ has apparently been detected until now inside a ZZ Ceti spectrum. Moreover, adiabatic calculations for $\ell=4$ modes computed for our model do not indicate a $\ell=4$ mode could fit this period (the $\ell=4$, $k=5$ mode holds a period of 124.9 s and the $\ell=4$, $k=6$ one a period of 145.6 s). These facts make this hypothesis rather improbable.

Our approach suggests another scenario to account for this peculiarity.

First, we showed the $\ell=2$, $k=2$ mode computed for our model has a period of 142.1 s and consequently we concluded the 141.9 s period observed in the spectrum of PY Vul is the $\ell=2$, $k=2$, $m=0$ mode. Nonetheless, if this identification allows to recognize the 141.9 s pulsation as a true mode, the strange behaviour of its amplitude remains unexplained. The computation of the $\ell=3$, $\ell=4$ and finally $\ell=5$ non-radial g modes for our model may solve the problem however. Indeed, this calculation shows that the $\ell=3$, $k=4$ mode has a period of 139.9 s, the $\ell=4$, $k=6$ a period of 145.6 s and the $\ell=5$, $k=9$ a period of 143.0 s. One then notes that: $f_{(139.9s)} + f_{(145.6s)} = 2 \times f_{(141.9s)}$ with $|\Delta f| = |f_{(141.9s)} - 0.5 \times (f_{(139.9s)} + f_{(145.6s)})| \sim 40 \mu\text{Hz}$ on the one hand and that: $f_{(139.9s)} + f_{(143.0s)} = 2 \times f_{(141.9s)}$ with $|\Delta f| = |f_{(141.9s)} - 0.5 \times (f_{(139.9s)} + f_{(143.0s)})| \sim 20 \mu\text{Hz}$ on the other hand.

These relations prove the $\ell=2$, $k=2$ mode that stands for the observed 141.9 s period may be concerned by two potential true resonances, each of them implying modes with 3 different ℓ degrees (respectively $\ell=2$, 3, 4 for the first one and $\ell=2$, 3, 5 for the second one). Moreover, the value of the frequency difference $|\Delta f|$ is not redhibitory because it can be easily justified by the internal error inherent in modeling and modes computation, error that can not ensure a precision on the periods computation better than about 0.5 s; this is all the more true for the second frequency relation for which $|\Delta f|$ is at the same order of magnitude as the time resolution

related to the observations coming from HST.

It is also admissible that modes with degree $\ell \geq 6$ may potentially induce true resonances with the $\ell=2, k=2$ mode but the latter, from the very weak radial density and pressure perturbations they involve, have negligible probability to interfere strongly enough with the central mode ($\ell=2, k=2$) of the resonant triplet to make the resulting interaction detectable. As a consequence, only the 2 former frequency relations seem able to account for a true resonance involving the observed ($\ell=2, k=2$) 141.9 s mode.

Furthermore, it is not surprising not to detect in the spectrum the 2 other modes belonging to this resonant triplet since the visibility of a mode decreases with increasing ℓ . By the way, the resulting linear combination $[f_{\ell=3(139.9s)} + f_{\ell=4(145.6s)}]$ or $[f_{\ell=3(139.9s)} + f_{\ell=5(143.0s)}]$ would probably stay undetected if it did not combine with the central ($\ell=2, k=2$) 141.9 s mode.

As a consequence, the 141.9 s pulsation may be the result of a true resonance, a coincidence between a $\ell=2$ mode and a linear combination generated by parent modes with degrees $\ell=3$ and $\ell=4$ or $\ell=3$ and $\ell=5$. This juxtaposition of periods (real mode plus linear combination) may explain why the amplitude of the resulting pulsation does not vary with wavelength as linear theory predicts for the amplitude of a single, isolated $\ell=2$ mode (the amplitude of the genuine $\ell=2$ mode being sensibly disturbed by the one of the linear combination).

The explanation may even go beyond. Indeed, one can also suspect this resonant triplet may be affected by the non-linear effect of frequency lock or, at least, be in a situation of intermediate regime. Effectively, Goupil et al. (1998) indicate that if 3 modes (with different ℓ degrees) have frequencies very close to resonance (such as $f_1 + f_3 \sim 2 \times f_2$) then the frequency lock may occur.

This phenomenon involves that, when the frequencies are near the exact resonance, the resonant coupling is operative and forces the 3 frequencies to be equidistant even if they are not so in the frame of linear theory (in that case the actual frequencies of the modes involved by the frequency lock differ from the values computed for the modes of our model since the calculations rely on linear formulae).

However, Goupil and Buchler (1994) warn that such a non-linear effect complies selection rules that notably impose the sum of the spherical degrees of all the concerned modes must be even. For the first potential resonance, the sum of spherical degrees is 11 [$(\ell=4) + (\ell=3) + (\ell=2) + (\ell=2)$]: the sum is odd

thus the triplet ineligible to non-linear coupling. In turn, the second prospective resonance satisfies the selection criterium because it induces an even sum of degrees (12): $(\ell=5) + (\ell=3) + (\ell=2) + (\ell=2)$. It is the only one possibility for a non-linear coupling to occur and allow the frequency lock or intermediate regime to show up. Besides, the probability of non-linear coupling in this last case increases as the frequency mismatch $|\Delta f|$ ($|\Delta f| \sim 20 \mu\text{Hz}$) is smaller and the frequencies of the 3 modes are almost equidistant: $[f_{(141.9s)} - f_{(143.0s)}] \sim [f_{(139.9s)} - f_{(141.9s)}]$.

Goupil et al. (1998) also showed the amplitude of the 3 modes resulting from a frequency lock depends in particular on the modes growth rate (κ) and the non-linear coupling coefficients.

It is then possible that the triplet configuration does favour the amplitude of the central component (the 141.9 s observed mode) and also not surprising that the amplitude of this mode does not vary with wavelength as suggested by linear theory. Nonetheless, to settle this hypothesis unambiguously, it should be necessary to estimate the growth rate for the involved modes by performing non-adiabatic calculations and make sure afterwards that the value derived for κ is compatible with the achievement of the frequency lock effect ($\kappa \geq 2\pi\Delta f$) or the realization of the intermediate regime ($\kappa \leq 2\pi\Delta f$).

B.7 Conclusive remarks

By combining observational data and modeling techniques relying on asteroseismology, we were able to build a best fitting model to represent the ZZ Ceti star G 185-32. This model made it possible to constrain the main physical parameters of the star then to identify the periods detected in its pulsation spectrum while separating the linear combinations from the real modes. One could also estimate the rotational splitting effect on the modes and, finally, propose a new hypothesis to explain the singularity of the 141.9 s mode.

Relying on a reference period for which the identification was certain, the modeling process came to a model whose synthetic spectrum fits the observed modes of PY Vul with an average relative error as low as 0.7 %, which currently translates quite a satisfactory matching. The structural properties of the model mostly reveal that G 185-32 should have a full mass $M_\star = 0.638(\pm 0.007)M_\odot$, a hydrogen envelope as massive as $M(H) = 1.70(\pm 0.10) \times 10^{-4} M_\star$

and an effective temperature $T_{eff}=12280 (\pm 80)$ K. These values show G 185-32 is located near the blue edge of the ZZ Ceti instability strip on the one hand and its hydrogen mass fraction is close to the value usually allotted to ZZ Ceti stars on the other hand, similar to the one derived for HL Tau 76: $M(H) = 2.35 \times 10^{-4} M_{\star}$ (PVD, 2005).

The presence of partial multiplets in the pulsation spectrum of the ZZ Ceti allowed to evaluate the rotational splitting effect on the modes from the frequency shift observed between members of the multiplets ($\delta f_{\ell=2} \sim 16 \mu\text{Hz}$). This evaluation suggests G 185-32 rotates with a period of 14.5 hr, roughly 3 or 4 times faster than HL Tau 76 does. This rotation rate may also be compared to the one of G 226-29 (approximatively 9 hr).

The computation of the $\ell=1$ and $\ell=2$ modes for the model enabled to rule on the nature of some ambiguous pulsations, especially when the periodicities are marginally detected (the 181.9 s period for example) or when the mode perfectly satisfies a linear combination relation. Our modeling indicates the 70.9 s, 148.5 s, 181.9 s and 212.8 s should be considered as false modes.

Another point our study dealt with regards the ℓ degree identification and its comparison with the one proposed by Castanheira et al. (2004). Our analysis only disagrees with their conclusion for some rare cases: the 212.8 s period Castanheira et al. do consider as a $\ell=1$ mode whereas our study suggests as a false mode (linear combination), the couple of periods (299.8 s, 301.4 s) for which Castanheira et al. assign the $\ell=1$ value whereas our model indicates they should be $\ell=2$ modes, the 370.2 s and 454.6 s periods for which the discrepancy is weak: Castanheira et al. conclude they are $\ell=1$ modes while our model spectrum can identify them as well as $\ell=1$ modes as $\ell=2$ modes but favours however the $\ell=2$ alternative (smallest $|\delta P/P|$ value).

It is also important to note that G 185-32 does pulsate preferentially on $\ell=2$ modes, like HL Tau 76 (PVD, 2005) and BPM 37093 (Kanaan et al., 2005). At last, our modeling puts forward a new hypothesis to explain why the amplitude of the 141.9 s period does not vary with wavelength from UV to visible, contrary to what foresees linear theory for $\ell=1$ or $\ell=2$ modes. To account for this phenomenon, Castanheira et al. (2004) did suppose this pulsation

was not a true mode and Thompson et al. (2004) did assert it was a $\ell=4$ mode. We suggest another scenario from the calculation of the $\ell=2, 3, 4$ and 5 modes for our model. Indeed, the 141.9 s would be the result of a superposition between a real $\ell=2$ mode and a linear combination generated by parent modes with respective degrees $\ell=3$ and $\ell=4$ or $\ell=3$ and $\ell=5$. As a result, the amplitude of the genuine $\ell=2$ mode would be altered by the one of the linear combination that exactly coincides with it. Accordingly, it is not surprising that the amplitude of the resulting period does not comply theoretical predictions expressed for an isolated, undisturbed mode. Furthermore, this resonant triplet may undergo the frequency lock effect or simply be in a situation of intermediate regime (only possible however for the true resonance involving the $\ell=2, 3$ and 5 modes because of some selection rules). This non-linear coupling, if it does actually occur, could easily explain the strangeness of the 141.9 s mode since it sensibly perturbs both frequency and amplitude of each mode involved in the concerned triplet.

Bibliographie

- [1] Baker, N. & Kippenhahn, R. 1965, ApJ, 142, 868
- [2] Bergeron, P., Wesemael, F. & Fontaine, G. 1991, ApJ, 367, 253
- [3] Bergeron, P., Fontaine, G., Brassard, P. et al. 1993, ApJ, 106, 1987
- [4] Bergeron, P., Wesemael, F., Lamontagne, R. et al. 1995, ApJ, 449, 258
- [5] Bergeron, P., Fontaine, G., Billères, M., Boudreault, S. & Green, E.M. 2004, ApJ, 600, 404
- [6] Böhm-Vitense, E. 1958, Zs. Ap., 46, 108
- [7] Böhm, K.-H. and Cassinelli, J.P. 1971, Astr. Ap., 12, 21
- [8] Bradley, P.A. 1993, Theoretical asteroseismology of white dwarfs stars, University of Texas, dissertation
- [9] Bradley, P.A. 1994, PASP, 106, 104
- [10] Bradley, P.A. 1998, ApJS, 116, 307
- [11] Bradley, P.A. 2001, ApJ, 552, 326
- [12] Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F, Kawaler, S.D. & Tassoul, M. 1991, ApJ, 367, 601
- [13] Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F. & Hansen, C.J. 1992, ApJS, 80, 369
- [14] Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F. & Tassoul, M. 1992, ApJS, 81, 747
- [15] Brassard, P. & Fontaine, G. 2005, ApJ, 622, 572
- [16] Brickhill, A.J. 1975, MNRAS, 170, 405
- [17] Brickhill, A.J. 1990, MNRAS, 246, 510
- [18] Brickhill, A.J. 1991, MNRAS, 251, 673
- [19] Buchler, J. R., Goupil, M.J., Hansen, C. J. 1996, A&A, 321, 159
- [20] Castanheira, B. G., Kepler, S.O., Moskalik, P. et al. 2004, A&A, 413, 623
- [21] Chandrasekhar, S., Friedman, J.L. 1972, ApJ, 176 745
- [22] Clemens, J. C., van Kerkwijk, M. H. & Wu, Y., MNRAS, 314, 220
- [23] Córscico, A. H., Althaus, L. G., Benvenuto, O. G. & Serenelli, A. M. 2001, A&A, 380, L17
- [24] Córscico, A. H., Althaus, L. G., Benvenuto, O. G. & Serenelli, A. M. 2002, A&A, 387, 531
- [25] Córscico, A. H., Althaus, L. G., Montgomery, M.H. et al. 2005, A&A, 429, 277
- [26] Cowling, T.G. 1941, MNRAS, 101, 367
- [27] Cowling, T.G. & Newing, R.A. 1949, ApJ, 109, 149
- [28] Cox, J.P. 1968, New York, Gordon and Breach QB801.C65
- [29] Cox, J.P. 1979, BASI, 7, 4
- [30] Cox, J.P. 1980, Theory of stellar pulsation, Princeton Series in Astrophysics, book

- [31] De Loore, C. 1970, *Ap. Space Sci.*, 6, 60
- [32] Deupree, R.G. 1977, *ApJ*, 211, 509
- [33] Dolez, N., Vauclair, G., Kleinman, S.J. et al. 2005 (DVK), submitted
- [34] Dziembowski, W.A. 1971, *Acta Astron*, 21, 289
- [35] Dziembowski, W.A. 1977, *Acta Astron*, 27, 1
- [36] Eddington, A.S. 1918, *MNRAS*, 79R, 2
- [37] Evans, J. W., Michard, R. 1962, *ApJ*, 136, 487
- [38] Evans, J. W., Michard, R. 1962, *ApJ*, 136, 493
- [39] Fleming, T.A., Liebert, J. & Green, R.F. 1986, *ApJ*, 308, 176
- [40] Fontaine, G., Brassard, P. 2004, 14th European Workshop on White Dwarfs, D. Koester & S. Moehler, Eds., in press
- [41] Fontaine, G., Brassard, P. & Bergeron, P. 2001, *PASP*, 113, 409
- [42] Fontaine, G., Graboske, H. C. Jr. & van Horn, H. M. 1977, *ApJS*, 35, 293
- [43] Fontaine, G. & Wesemael, F. 1997, in *White dwarfs*, Eds. J. Isern, M. Hernanz & E. Garcia-Berro, 173
- [44] Goldreich, P. & Wu, Y. 1999a, *ApJ*, 511, 904
- [45] Goldreich, P. & Wu, Y. 1999b, *ApJ*, 523, 805
- [46] Goupil, M.J., Buchler, J.R., 1994, *A&A*, 291, 481
- [47] Goupil, M.J., Dziembowski, W.A., Fontaine, G. 1998, *Baltic Astronomy*, 7, 21
- [48] Iglesias, C. A. & Rogers, F. J. 1996, *ApJ*, 454, 943
- [49] Itoh N., Kohyama, S., Matsumoto, N. & Seki, M. 1984, *ApJ*, 285, 758
- [50] Itoh, N., Mitake, S., Iyetomi, H. & Ichimaru, S. 1983, *Apj*, 273, 774
- [51] Jones, P.W. et al. 1989, *ApJ*, 336, 403
- [52] Kanaan, A., Nitta, A., Winget, D. E. et al. 2005, *A&A*, 432, 219
- [53] Kawaler, S. 1987, *LNP*, 274, 367
- [54] Kepler, S.O. 1984, *ApJ*, 278, 754
- [55] Kepler, S.O., Giovannini, O., Wood, M.A. et al. 1995, *ApJ*, 447, 874
- [56] Kepler, S.O. & Bradley, P.A. 1995, *Baltic Astronomy*, 4, 166
- [57] Kepler, S.O. et al. 2000, *ApJ*, 534, 185
- [58] Kepler, S.O., Robinson, E.L. & Koester, D. et al. 2000, *ApJ*, 539, 379
- [59] Kleinman, S.J., Nather, R.E., Winget, D.E. et al. 1998, *ApJ*, 495, 424
- [60] Kleinman, S.J. et al. 2004, *ApJ*, 607, 426
- [61] Kotak, R., van Kerkwijk, M. H., Clemens, J. C. & Bida, T. A. 2002, *A&A*, 391, 1005
- [62] Landolt, A.U. 1968, *ApJ*, 153, 151
- [63] Ledoux, P. 1945, *ApJ*, 102, 143
- [64] Ledoux, P. & Walraven, T., *Handbuch der Physik*, ed. S. Flüge (Berlin :Springer-Verlag), 51, 353
- [65] Leighton, R.B., Noyes, R.W. & Simon, G.W 1962, *ApJ*, 135, 474
- [66] Mc Graw, J.T., Fontaine, G., Lacombe, P. et al. 1981, *ApJ*, 250, 349

- [67] Metcalfe, T. S., Montgomery, M. H. & Winget, D.E. 2003, MNRAS, 344, L88
- [68] Metcalfe, T.S., Montgomery, M. H., Kanaan, A. 2004, ApJ, 605, L133
- [69] Mitake, S., Ichimaru, S. & Itoh, N. 1984, ApJ, 277, 375
- [70] Mukadam, A., Kepler, S.O., Winget, D.E. et al. 2003, ApJ, 594, 961
- [71] Mukadam, A., Mullaly, F., Nather, R.E. et al. 2004a, ApJ, 607, 982
- [72] Mukadam, A. S., Winget, D. E., von Hippel, T. et al. 2004b, ApJ, 612, 1052
- [73] Nather, R.E., Winget, D.E., Clemens, J.C. et al. 1990, ApJ, 361, 309
- [74] Pfeiffer, B., Vauclair, G., Dolez, N. et al. 1996, A&A, 314, 182
- [75] Robinson, E.L., Kepler, S.O. & Nather, R.E. 1982, ApJ, 259, 219
- [76] Robinson, E.L., Mailloux, T.M., Zhang, E. et al. 1995, ApJ, 438, 908
- [77] Salaris, M., Cassisi, S., Garcia-Berro, E., Isern, J. & Torres, S. 2001, A&A, 371, 921
- [78] Shapley, H. 1914, ApJ, 40, 448
- [79] Tassoul, M. & Tassoul, J.L. 1983, ApJ, 267, 334
- [80] Tassoul, M., Fontaine, G. & Winget, D. E. 1990, ApJS, 72, 335
- [81] Thompson, S.E., Clemens, J.C., van Kerkwijk, M.H. & Koester, D. 2003, ApJ, 589, 921
- [82] Thompson, S.E., Clemens, J. C, van Kerkwijk, M. H. et al. 2004, ApJ, 610, 1001
- [83] Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., Shibahashi, H., 1989, Nonradial Oscillations of stars, University of Tokyo press, book
- [84] Van Kerkwijk, M.H., Clemens, J. C. & Wu, Y. 2000, MNRAS, 314, 209
- [85] Vauclair, G., Moskalik, P., Pfeiffer, B. et al. 2002, A&A, 381, 122
- [86] Wood, M. 1995, in White Dwarfs, Koester, D. & Werner, K.(Eds.), Springer, 41
- [87] Winget, D.E. , van Horn, H.M. & Hansen, C.J. 1981, ApJ, 245L, 33
- [88] Winget, D.E. , Hansen, C.J., Liebert, J.W. et al. 1987, APJ, 315, 77
- [89] Winget, D.E. , Nather, R.E., Clemens, J.C. et al. 1991, ApJ, 378, 326
- [90] Winget, D.E. , Nather, R.E., Clemens, J.C. et al. 1994, ApJ, 430, 839
- [91] Wu, Y. & Goldreich, P. 1999, ApJ, 519,783
- [92] Wu, Y., 2001, Mon. Not. R. Astron. Soc., 323, 248
- [93] Wu, Y. & Goldreich, P. 2001, ApJ, 546, 469

Liste des tableaux

Table 1-1. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=1$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $M(He)/M_\star = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K	30
Table 1-2. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=2$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $M(He)/M_\star = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K	30
Table 2-1. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=1$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.66 M_\odot$ avec $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff}=12572$ K	49
Table 2-2. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=2$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.66 M_\odot$ avec $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff}=12572$ K	50
Table 2-3. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=1$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.47 M_\odot$ avec $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K	55
Table 2-4. Périodes et énergie cinétique associée des modes de degré $\ell=2$ pour un modèle de masse $M_\star = 0.47 M_\odot$ avec $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K	55
Table 3-1. Liste des périodes issues du spectre de HL Tau 76 d'après Dolez et al.	60
Table 3-1 (suite). Liste des périodes issues du spectre de HL Tau 76 d'après Dolez et al.	61
Table 3-2. Paramètres du modèle représentant HL Tau 76	68
Table 3-3. Modes adiabatiques de degré $\ell=1$ pour le modèle représentant HL Tau 76	69
Table 3-4. Modes adiabatiques de degré $\ell=2$ pour le modèle représentant HL Tau 76	69
Table 3-5. Identification la plus probable des modes observés dans le spectre de HL Tau 76	73
Table 3-5 (suite). Identification la plus probable des modes observés dans le spectre de HL Tau 76	74
Table 3-6a. Recherche de modes $\ell=1$ possibles dans le spectre de HL Tau 76 avec $\Delta P_{\ell=1}=48.0$ s d'après l'analyse de Dolez et al.	79
Table 3-6b. Recherche de modes $\ell=2$ possibles dans le spectre de HL Tau 76 avec $\Delta P_{\ell=2}=27.7$ s d'après l'analyse de Dolez et al.	79
Table 3-6b (suite). Recherche de modes $\ell=2$ possibles dans le spectre de HL Tau 76 avec $\Delta P_{\ell=2}=27.7$ s d'après l'analyse de Dolez et al.	80
Table 3-7. Identification la plus probable du degré ℓ des modes observés dans le spectre de HL Tau 76 d'après Dolez et al.	80
Table 4-1. Modes observés dans le spectre de G 185-32	84
Table 4-2. Influence de la variation de la T_{eff} sur la période des modes $\ell=2$, $k=1$ puis $k=10$	86
Table 4-3. Modèles-solutions possibles dans le plan $\log q(H)$ vs. M_\star obtenus à partir du mode à 72.5 s à T_{eff} et $q(He)$ constantes	87

Table 4-4. Paramètres du modèle représentant G 185-32	88
Table 4-5. Modes adiabatiques de degré $\ell=1$ pour le modèle représentant G 185-32 . . .	89
Table 4-6. Modes adiabatiques de degré $\ell=2$ pour le modèle représentant G 185-32 . . .	89
Table 4-7. Identification préliminaire des modes observés dans le spectre de G 185-32 . .	90
Table 4-8. Identification complète des modes observés dans le spectre de G 185-32 . . .	95
Table A1. Periods list in HL Tau 76 spectrum after Dolez et al.	117
Table A2. Best fitting model parameters	121
Table A3a. $\ell=1$ modes periods for the best fitting model	124
Table A3b. $\ell=2$ modes periods for the best fitting model	124
Table A4. Most probable identification of the modes observed in HL Tau 76 spectrum	127
Table A4 (continued). Most probable identification of the modes observed in HL Tau 76 spectrum	128
Table B1. Detected periodicities in G 185-32 spectrum	133
Table B2. Impact of the variation of T_{eff} on the $\ell=2, k=1$ then on the $\ell=2, k=10$ modes	134
Table B3. Potential solutions in the $\log q(H)$ vs. M_\star plane derived from the reference mode with T_{eff} and $q(He)$ constant	134
Table B4. Structural parameters for the best fitting model	135
Table B5. $\ell=1$ modes for the best fitting model	135
Table B6. $\ell=2$ modes for the best fitting model	135
Table B7. Preliminary identification of the modes observed in PY Vul spectrum	137
Table B8. Full identification of the observed modes in G 185-32 spectrum	141

Table des figures

1.1	<i>Principales classes d'étoiles variables dans le diagramme H-R</i>	15
1.2	<i>Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell=1$) pour un modèle de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $M(He)/M_\star = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K</i>	31
1.3	<i>Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell=1$) pour un modèle de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $M(He)/M_\star = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K</i>	32
1.4	<i>Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell=2$) pour un modèle de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $M(He)/M_\star = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K</i>	32
1.5	<i>Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell=2$) pour un modèle de masse $M_\star = 0.55 M_\odot$ avec $M(H)/M_\star = 10^{-10}$, $M(He)/M_\star = 10^{-4}$ et $T_{eff}=11430$ K</i>	33
2.1	<i>Gradient de la composition chimique en fonction de la masse réduite Q pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11430$ K, $q(H)=10^{-10}$ et $q(He)=10^{-4}$</i>	40
2.2	<i>Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11430$ K, $q(H)=10^{-10}$ et $q(He)=10^{-4}$</i>	41
2.3	<i>Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour des modèles ayant $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11450$ K, $q(He) = 10^{-2}$ et $q(H) = 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}$ respectivement de haut en bas</i>	43
2.4	<i>Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$ et $q(He)=2 \times 10^{-5}$</i>	45
2.5	<i>Composante radiale (y_1) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=4$ (piégé) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$</i>	45
2.6	<i>Composante radiale (y_1) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=8$ (normal) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$</i>	46
2.7	<i>Composante radiale (y_1) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=6$ (confiné) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$</i>	46
2.8	<i>Composante tangentielle (y_2) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=4$ (piégé) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$</i>	47
2.9	<i>Composante tangentielle (y_2) de la fonction propre du mode $\ell=1$, $k=8$ (normal) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$</i>	47
2.10	<i>Composante tangentielle (y_2) de la fonction propre du mode $k=6$ (confiné) pour un modèle de masse $M_\star=0.55 M_\odot$, $T_{eff}=11400$ K, $q(H)=5 \times 10^{-8}$, $q(He)=2 \times 10^{-5}$</i>	48
2.11	<i>Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_\star = 0.66 M_\odot$, $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff}=12572$ K</i>	51
2.12	<i>Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_\star = 0.66 M_\odot$, $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff}=12572$ K</i>	51
2.13	<i>Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_\star = 0.66 M_\odot$, $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff}=12572$ K</i>	52

2.14	<i>Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.66 M_{\odot}$, $\log q(H) = -11.5$, $\log q(He) = -3$ et $T_{eff}=12572$ K</i>	53
2.15	<i>Energie cinétique vs. Période réduite pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.66 M_{\odot}$, $T_{eff}=12572$ K, $\log q(H) = -11.5$ et $\log q(He) = -3$; les traits pleins se rapportent aux modes de degré $\ell=2$, les pointillés aux modes de degré $\ell=1$</i>	53
2.16	<i>Gradient de la composition chimique en fonction de la masse réduite pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K</i>	54
2.17	<i>Variation du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä en fonction de la masse réduite pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K</i>	54
2.18	<i>Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K</i>	56
2.19	<i>Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 1$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K</i>	57
2.20	<i>Energie cinétique vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K</i>	57
2.21	<i>Period Spacing vs. Période (pour les modes de degré $\ell = 2$) pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $\log q(H) = -4$, $\log q(He) = -2.5$ et $T_{eff}=10954$ K</i>	58
2.22	<i>Energie cinétique vs. Période réduite pour un modèle de masse $M_{\star} = 0.47 M_{\odot}$, $T_{eff}=10954$ K, $\log q(H) = -4$ et $\log q(He) = -2.5$, les traits pleins se rapportent au degré $\ell=2$ et les pointillés au degré $\ell=1$</i>	58
3.1	χ^2 en fonction de $\log q(H)$ pour les modes de degré $\ell=1$ avec $M_{\star}=0.55 M_{\odot}$	67
3.2	χ^2 en fonction de $\log q(H)$ pour les modes de degré $\ell=2$ avec $M_{\star}=0.55 M_{\odot}$	67
3.3	χ^2 en fonction de M_{\star} pour les modes de degré $\ell=1$	67
3.4	χ^2 en fonction de M_{\star} pour les modes de degré $\ell=2$	67
3.5	$\log E_{cin}$ vs. P pour les modes de degré $\ell=1$ du meilleur modèle considéré	69
3.6	$\log E_{cin}$ vs. P pour les modes de degré $\ell=2$ du meilleur modèle considéré	69
3.7	Spectres observé et calculé pour HL Tau 76 entre 300 s et 600 s	78
3.8	Spectres observé et calculé pour HL Tau 76 entre 900 s et 1200 s	78
3.9	Spectres observé et calculé pour HL Tau 76 entre 600 s et 900 s	78
3.10	Spectres observé et calculé pour HL Tau 76 entre 1200 s et 1500 s	78
4.1	Spectres observé et calculé pour G 185-32 entre 0 s et 400 s	96
4.2	Spectres observé et calculé pour G 185-32 entre 400 s et 700 s	97
4.3	Variation théorique de l'amplitude des modes g en fonction de la longueur d'onde pour un modèle d'étoile DAV d'après Kepler et al. (2000)	100
A.1	χ^2 vs. $\log q(H)$ for $\ell=1$ modes with $M_{\star} = 0.55 M_{\odot}$	119
A.2	χ^2 vs. $\log q(H)$ for $\ell=2$ modes with $M_{\star} = 0.55 M_{\odot}$	120
A.3	χ^2 vs. M_{\star} for $\ell=1$ modes	120
A.4	χ^2 vs. M_{\star} for $\ell=2$ modes	120
A.5	$\log E_{kin}$ vs. P for $\ell=1$ modes for the best fitting model	124
A.6	$\log E_{kin}$ vs. P for $\ell=2$ modes for the best fitting model	125
A.7	Computed vs. observed spectra for HL Tau 76 between 300 s and 600 s	129
A.8	Computed vs. observed spectra for HL Tau 76 between 900 s and 1200 s	129
A.9	Computed vs. observed spectra for HL Tau 76 between 600 s and 900 s	129
A.10	Computed vs. observed spectra for HL Tau 76 between 1200 s and 1500 s	129

B.1	<i>Observed vs. computed spectra between 0 s and 400 s for G 185-32</i>	140
B.2	<i>Observed vs. computed spectra between 400 s and 700 s for G 185-32</i>	140

ABSTRACT :

This thesis shows how far asteroseismological techniques, relying on observation and modeling, allow to derive the structural properties of a DAV white dwarf, especially how it becomes possible to deduce the mass of the remaining hydrogen envelope in the star. Two ZZ Ceti stars were studied : HL Tau 76 (located on the red edge of the instability strip) and G 185-32 (on the blue edge). Modeling indicates that the hydrogen envelopes in these stars have nearly the same mass : $M(H) = 2.0(\pm 0.3) \times 10^{-4} M_{\star}$. This result may suggest a possible constancy for the hydrogen layer mass among the DA stars class and consequently prospective constraints for cosmochronology and stellar evolution. Moreover, this thesis illustrates how far modeling might reveal some physical features such as a non-uniform stellar rotation, a non-linear coupling between resonant modes, an interaction between pulsations and convection.